

Exercice 1 (CCINP 24) Pour $(A, B) \in \mathbf{R}[X]$ on pose : $(A|B) = \int_0^{+\infty} A(t)B(t)e^{-t} dt$.

- 1) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire, puis que $(X^k|1) = k!$.
- 2) Soit Q la projection orthogonale de 1 sur $F = \text{Vect}(X, X^2, \dots, X^n)$.
Montrer qu'il existe $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ tel que $Q = \sum_{k=1}^n a_k X^k$.
- 3) Soit $P = 1 - \sum_{k=1}^n a_k \prod_{j=1}^k (X + j)$.
Calculer $(1 - Q|X^i)$. En déduire que $P(i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$, puis l'expression de P .
- 4) Montrer que $\inf \left\{ \int_0^{+\infty} (1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_n t^n)^2 e^{-t} dt, (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{R} \right\} = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 2 (Mines-Télécom 24) Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y + z + t = x - y - z + t = 0\}$.

- 1) Montrer que F est un sous-espace de $\mathbf{R}^4$ et donner une base de F .
- 2) Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$ de la projection orthogonale sur F .
- 3) Soit $u = (1, 1, 1, 1)$. Déterminer $d(u, F)$.

Exercice 3 (CCINP 22) Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E et $z \in E$.

- a) Justifier l'existence de $\min \{\|f(x) - z\|; x \in E\}$ et expliquer comment calculer ce minimum.
- b) Déterminer ainsi $\min_{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})} \|AX + B\|$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & 15 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (Mines-Ponts 24) Soit $E = \mathbf{R}_4[X]$, F le sous-espace de E constitué des polynômes pairs, G le sous-espace de E constitué des polynômes impairs.

Pour P et Q dans E on pose : $\Phi(P, Q) = \sum_{k=0}^4 (P(k) + (-1)^k P(-k)) (Q(k) + (-1)^k Q(-k))$.

- 1) Montrer que Φ est un produit scalaire sur E .
- 2) Montrer que F et G sont supplémentaires et orthogonaux.
- 3) Déterminer une base orthonormée de E adaptée à $E = F \oplus G$.

Exercice 5 (Centrale 22) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

L'espace $\mathbf{R}^n$ est muni de sa base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ et du produit scalaire canonique.

Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$, on pose $\delta(F) = \max_{1 \leq i \leq n} d(e_i, F)$.

- a) Soit $G = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$.
Montrer que G est un sous espace vectoriel, préciser sa dimension et calculer $\delta(G)$.
- b) Soit F un sous espace de $\mathbf{R}^n$ de dimension k .
Montrer que $\sum_{i=1}^n d(e_i, F)^2 = n - k$. En déduire que $\delta(F) \geq \sqrt{\frac{n-k}{n}}$.