

Exercice 1 (ENSEA 25) Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $f_n(x) = \frac{n^2 x^2}{1+n^3 x^3}$. Étudier la convergence simple, puis la convergence uniforme, de (f_n) et de (f'_n) .

Exercice 2 (CCINP 25) Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$ si $x \geq 0$, $\frac{nx^3}{1+nx^2}$ si $x < 0$.

- Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbf{R}$ vers une fonction que l'on précisera.
- Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbf{R}$ puis étudier la convergence de (f'_n) .

Exercice 3 (Navale 25)

Étudier la convergence sur $]0, 1]$ de la suite de fonctions définie par : $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} - \int_1^n \frac{x^t}{t} dt$.

Exercice 4 (Mines-Ponts 25) Soit $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ pour $n \in \mathbf{N}$.

- Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de terme général $f_n(x)$ sur $[0, +\infty[$.
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer cette intégrale.
- Déterminer la limite de $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ quand n tend vers l'infini. Commentaire?

Exercice 5 (CCINP 25) Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x > 0$ on pose $f_n(x) = \frac{1}{\text{sh}(nx)}$.

- Donner le domaine de définition de $S(x) = \sum_{n \geq 1} f_n(x)$.
- Déterminer le domaine de continuité de S , puis les variations de S .
- Démontrer qu'il existe $A > 0$ tel que : $\forall n \geq 2, \forall x \geq A, f_n(x) \leq 3e^{-nx}$.
- En déduire que $S(x) \sim \frac{1}{\text{sh}(x)}$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 6 (CCINP 25) Pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $u_n(x) = \frac{\ln(1+x^2 n^2)}{n^2 \ln(1+n)}$.

- Montrer que la série de terme général $u_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathbf{R}$.
- Montrer que la somme de la série est continue sur $\mathbf{R}$.
- La série des dérivées converge-t-elle normalement sur $\mathbf{R}$?
- Montrer que la série des dérivées converge uniformément sur $\mathbf{R}$.
(on pourra pour cela effectuer une comparaison série intégrale)

Exercice 7 (Centrale 25)

- Montrer qu'il existe une unique fonction f_n de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant :
 $f_n(1) = f_n(2) = 0$ et $f_n''(x) = (-1)^n 2^{-nx^2}$.
- Établir la convergence uniforme des séries de fonction $\sum f_n''$, $\sum f_n'$ et $\sum f_n$ sur tout segment de $\mathbf{R}_+^*$.

Exercice 8 (Mines-Télécom 23) Pour $x > 0$ on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+xn}$.

- Montrer que l'on définit ainsi une application continue sur $\mathbf{R}_+^*$.
- Déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$. c) Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbf{R}_+^*$.

Exercice 9 (Mines-Télécom 25) Pour tout $x > 0$ on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+x)}$.

- Montrer que f est bien définie sur $]0, +\infty[$.
- Déterminer $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tels que : $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 10 (CCINP 22) Soit $f: t \mapsto e^t \ln(t)$.

Justifier l'intégrabilité de f sur $]0, 1]$ puis montrer que $\int_0^1 f(t) dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n n!}$.