Exercice 1 *(Centrale 2009)* Soit $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces d'un espace E de dimension finie. On suppose que $\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} F_i = \{0_E\}$. Montrer que l'on définit une norme sur E en posant : $N(x) = \sum_{i=1}^n d(x, F_i)$.

Exercice 2 *(CCINP 2025)* Soit $a \in \mathbf{R}$, pour $P \in \mathbf{R}[X]$ on pose : $N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que N_a est une norme sur $\mathbf{R}[X]$.
2) Montrer que, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $|P(1)| \leqslant |P(0)| + \int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t$.
   En déduire que N_0 et N_1 sont équivalentes.
3) Plus généralement, montrer que N_a et N_1 sont équivalentes pour $0 \leqslant a \leqslant 1$.
4) Montrer que si une suite de vecteurs converge dans une espace vectoriel normé, alors la suite des normes de ces vecteurs converge vers la norme de la limite de cette suite.
5) Montrer que si $1 \leqslant a < b$ alors N_a et N_b ne sont pas équivalentes.
   Indication : on pourra considérer, pour $c \in]a, b[$, la suite (P_n) avec $P_n = \left(\frac{X}{c}\right)^n$.

Exercice 3 *(CCINP 2024)* Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit $f_n : x \mapsto \sin\left(nx\,\mathrm{e}^{-nx^2}\right)$.

a) Montrer que cette suite de fonctions converge simplement sur $[-1, 1]$.
b) Montrer que, pour tout $a \in]0, 1[$, la convergence est uniforme sur $[a, 1]$.
c) La convergence est-elle uniforme sur $[0, 1]$?

Exercice 4 *(CCINP 2024)* Soit $S(x) = \sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$.

a) Déterminer le domaine D de convergence cette série de fonctions.
b) Y a-t-il convergence normale sur D ?
c) Montrer que : $\forall x \in D$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}$.
d) Montrer que S est continue sur D.

Exercice 5 *(CCINP 2022)* Soit $a \in \mathbf{R}$. Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose $f_n(x) = \frac{nx(x^2+a)}{nx+1}\,\mathrm{e}^{-x}$.

a) Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$.
b) Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[0, 1]$ selon la valeur de a.
c) Soit $h > 0$. Montrer la convergence uniforme de (f_n) sur $[h, 1]$ pour tout a.