

Exercice 1 (CCINP 22) Pour $a \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $f_n(x) = x(1 + n^a e^{-nx})$.

- Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ et préciser sa limite.
- Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la convergence est uniforme sur $[0, +\infty[$.
- Calculer la limite quand n tend vers l'infini de $\int_0^1 f_n(t) dt$.

Exercice 2 (CCINP 23) Pour $n \in \mathbf{N}$ soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(n+x)}{(n+x)\sqrt{x}} dx$.

- Justifier l'existence de I_n puis déterminer sa limite quand n tend vers l'infini.
- Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(n+x)\sqrt{x}} dx$. En déduire un équivalent de I_n .

Exercice 3 (CCINP 22) Soit $S(x) = \sum_{n \geq 2} \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$.

- Déterminer le domaine D de convergence cette série de fonctions.
- Montrer que cette série ne converge pas normalement sur D .
- Montrer que : $\forall x \in D, \forall n \in \mathbf{N}^*, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$.
- Montrer que S est continue sur D . Est-elle intégrable?

Exercice 4 (CCINP 23) Soit $I = \int_0^1 \frac{t(\ln t)^2}{(1-t)^2} dt$.

Justifier l'existence de I puis montrer que $I = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.