Fonctions définies par une intégrale

Exercice 1 *(Mines-Télécom 25)* Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t})\,\mathrm{e}^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que F est définie et de classe C^1 sur $]-1, +\infty[$. Déterminer la valeur de $F'(x)$.
2) Montrer que F admet une limite, que l'on précisera, en $+\infty$. En déduire la valeur de $F(x)$.

Exercice 2 *(CCINP 25)* Soit f de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et $F(x) = \int_0^1 f'(xt)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que F est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.
2) En déduire que $x \mapsto \frac{f(x)-f(0)}{x}$ est prolongeable en une fonction C^∞ sur $\mathbf{R}$.

Exercice 3 *(CCINP 25)* Soit $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}(\sin t)^2}{t}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que l'intégrale définissant $g(x)$ converge pour tout $x > 0$.
2) Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3) Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$. Calculer $g'(x)$; en déduire $g(x)$.

Exercice 4 *(CCINP 25)* On veut calculer $A = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$. On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.
2) Calculer $f(0)$ et déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$.
3) Montrer que f est C^1 sur $]0, +\infty[$ puis établir que $f'(x) = -A\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$.
4) Montrer que $\int_0^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t = -2A^2$. En déduire la valeur de A.

Exercice 5 *(CCINP 25)* Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que F est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
2) Montrer que F est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.
3) Déterminer les limites de $F(x)$ et de $F'(x)$ en $+\infty$.
4) Montrer que $F'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ pour $x > 0$;
5) Déterminer la valeur de $F(x)$ pour $x \in \mathbf{R}_+$.
6) Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Exprimer I en fonction de $F(0)$ puis déterminer sa valeur.

Exercice 6 *(Saint-Cyr 25)* Soit $F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^x}\,\mathrm{d}t$.

1) Déterminer le domaine de définition D de F.
2) Établir la continuité, puis la classe C^1, de F sur D.
3) Avec Python, conjecturer la valeur de $f(2)$; puis prouver cette conjecture.
4) Étudier la monotonie de F puis déterminer ses limites aux extrémités de D.

Exercice 7 *(Centrale 25)* Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que F est définie et continue sur $\mathbf{R}$.
2) Tracer avec Python la courbe représentative de F su $[-10, 10]$.
3) En posant $u = xt$ montrer que F est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^*$.
4) Montrer que l'équation $y''(x) = y(x)$ admet une unique solution bornée sur $\mathbf{R}$ vérifiant $y(0) = \frac{\pi}{2}$.
5) En utilisant odeint, tracer la courbe représentative de cette solution. Conjecture ?
6) Prouver le résultat conjecturé.