

On s'intéresse à la fonction $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t} dt$.

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1) Déterminer le domaine de définition D de F .

2) a) Montrer que F est de classe C^1 sur D .

b) Simplifier $F(x) + F'(x)$ pour $x \in D$.

c) F est-elle de classe C^∞ sur D ?

3) a) Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x) \geq \frac{1}{e} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{dt}{1+t}$.

b) En déduire la limite de $F(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

4) a) Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{x}+u} du$.

b) En déduire la limite en $+\infty$ de $\sqrt{x} F(x)$.

c) En s'inspirant des questions précédentes, montrer que $\sqrt{x} \left(\sqrt{x} F(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}$.

5) On s'intéresse désormais à la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $I_n = F\left(\frac{1}{n}\right)$.

a) Montrer que : $\int_0^{\sqrt{n}} \frac{du}{1+u} - I_n = \int_0^1 \frac{\sqrt{n}(1-e^{-u^2})}{1+u\sqrt{n}} du - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u^2}\sqrt{n}}{1+u\sqrt{n}} du$.

b) En déduire qu'il existe un réel c tel que : $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2} \ln(n) + c + o(1)$.