**Définition 1** Soit *u* un endomorphisme d'un espace vectoriel *E*.

Une *valeur propre* de u est un scalaire  $\lambda$  pour lequel existe un vecteur x non nul tel que  $u(x) = \lambda x$ . Un *vecteur propre* pour u est un vecteur x non nul pour lequel existe un scalaire  $\lambda$  tel que  $u(x) = \lambda x$ . Lorsqu'il n'est pas réduit au vecteur nul, le noyau de  $u - \lambda I d_E$  est appelé *espace propre* associé à  $\lambda$ .

**Remarque 1** Un vecteur est propre si, et seulement si, il engendre une droite stable.

**Remarque 2** Si u est annulé par un polynôme P, toute valeur propre de u est racine de P.

**Remarque 3** Si u et v commutent, tout sous-espace propre pour u est stable par v.

**Proposition 1** Toute somme (finie) de sous-espaces propres est directe.

**Définition 2** Dans tout ce qui suit, *E* est un espace de dimension finie. Un endomorphisme de *E* est alors dit *diagonalisable* lorsqu'il peut être représenté par une matrice diagonale; il est dit *trigonalisable* lorsqu'il peut être représenté par une matrice triangulaire.

**Proposition 2** Soit u un endomorphisme de E.

u est diagonalisable  $\iff$  la somme des sous-espaces propres de u est égale à E  $\iff$  la somme des dimensions des sous-espaces propres de u est égale à la dimension de E

Remarque 4 Valeur propre d'une matrice carrée, matrice diagonalisable, matrice trigonalisable.

**Définition 3** Le polynôme caractéristique d'une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  est le polynôme  $\chi_M$  défini par :  $\forall x \in \mathbf{K}$ ,  $\chi_M(x) = (-1)^n \det(M - xI_n)$ .

**Remarque 5** 
$$\chi_M(x) = x^n - \text{tr}(M)x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(M)$$

Remarque 6 Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

**Remarque 7** Si  $\chi_u$  est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable.

**Proposition 3** En dimension finie, l'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme, appelé *spectre* de u et noté Sp(u), est l'ensemble des racines du polynôme caractéristique. Et la multiplicité de chacune de ces racines est un majorant de la dimension de l'espace propre correspondant.

**Proposition 4** u est diagonalisable si, et seulement si,  $\chi_u$  est scindé et la multiplicité de chaque valeur propre de u est égale à la dimension de l'espace propre correspondant.

**Théorème 1** u diagonalisable  $\iff \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} (u - \lambda I d_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$   $\iff u$  est annulé par un polynôme scindé à racines simples

**Corollaire 1** L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est diagonalisable.

**Théorème 2** Un endomorphisme est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé sur le corps des scalaires. En particulier, toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est trigonalisable.

**Corollaire 2** Le déterminant d'une matrice est le produit de ses valeurs propres complexes, tandis que sa trace est la somme de ses valeurs propres complexes (et tenant compte des multiplicités).

**Théorème 3** (Cayley-Hamilton)  $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ ,  $\chi_M(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{C})}$