Exercice 1 *(Navale 2019)* Pour $n \geqslant 2$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}\,\mathrm{d}t$.
Montrer que la suite (I_n) est bien définie et déterminer sa limite quand n tend vers l'infini.

Exercice 2 *(Mines-Télécom 2025)*
Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right)\mathrm{d}t$ puis déterminer sa valeur, sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 3 *(Mines-Ponts 2023)* Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit $a_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}(t^n)}\,\mathrm{d}t$.
Justifier l'existence de a_n puis trouver un équivalent de a_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 4 *(Mines-Télécom 2024)* Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x\,t)}{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et calculer $F'(x)$. En déduire $F(x)$.

Exercice 5 *(Mines-Ponts 2024)* Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x\,t)}{t\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

a) Déterminer le domaine de définition D de F.

b) Montrer que F est de classe C^1 sur D, calculer $F'(x)$, en déduire $F(x)$.

Exercice 6 *(Mines-Télécom 2018)* Soit $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-t\,x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

a) Déterminer le domaine de définition D de F.

b) Montrer que F est de classe C^1 sur D.

c) Déterminer F', puis $F(t)$ pour $t \in D$.