Exercice 1 *(Mines-Télécom 25)*
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice diagonalisable. Montrer que $\operatorname{tr}(A)^2 \leqslant \operatorname{rg}(A)\operatorname{tr}\left(A^2\right)$.

Exercice 2 *(Mines-Télécom 25)* Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A est semblable à une matrice diagonale D que l'on déterminera

b) Montrer que si une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ commute avec D alors elle est diagonale.

c) Soit $P(X) = X^7 + 4X^3 + 1$. Trouvez toutes les matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $P(M) = A$.

Exercice 3 *(Mines-Télécom 25)* Soit $A = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&1 \\ 1&1&0&1&2 \\ 1&0&1&0&2 \\ 1&1&0&1&2 \\ 1&0&0&0&1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer le rang de A, une base du noyau de A, les valeurs propres de A.

2) La matrice A est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ?

Exercice 4 *(CCINP 25)* À quelles conditions la matrice $\begin{pmatrix} 1&a&b&c \\ 0&1&d&e \\ 0&0&2&f \\ 0&0&0&2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 5 *(CCINP 25)*

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Que peut-on dire de $\det(A)$ s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $B^2 = A$?

2) Soit $a \in \mathbf{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 2+a & 2 & 1+a \\ 3-a & 3 & 3-a \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.
Calculer $\det(A)$. En déduire une condition pour qu'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $B^2 = A$.

3) Désormais $a \geqslant 0$. Déterminer les éléments propres de A puis donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

4) Désormais $a \neq 1$ et $a \neq 3$. Montrer que si M est telle que $M^2 = D$ alors $MD = DM$.
Déterminer les matrices M telles que $M^2 = D$. En déduire les matrices B telles que $B^2 = A$.

Exercice 6 *(Mines-Ponts 25)* Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ -1 & -2 & 5 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les valeurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe des réels a_n et b_n tels que : $A^n = a_n I_3 + b_n A$.

3) La matrice A est-elle inversible ? Le résultat précédent reste-t-il valable pour tout $n \in \mathbf{Z}$?

4) Existe-t-il des réels α et β tels que $(\alpha I_n + \beta A)^2 = A$?

Exercice 7 *(CCINP 25)* Soit $\alpha \in \mathbf{C}$ et A la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ définie par : $A_{i,j} = \alpha^{i+j-2}$.

1) Déterminer le rang de A, puis ses valeurs propres.

2) Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles A n'est pas diagonalisable ?

Exercice 8 *(CCINP 25)* Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j^2 & 1 & j \\ j & j^2 & 1 \end{pmatrix}$ où j $\in \mathbf{C}$ vérifie $1 + j + j^2 = 0$.

1) Déterminer les valeurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?

2) Soit $\Phi : \mathscr{M}_3(\mathbf{C}) \to \mathscr{M}_3(\mathbf{C})$; $X \mapsto AXA$.
Déterminer les valeurs propres de Φ. Φ est-elle diagonalisable ?

Exercice 9 *(Mines-Ponts 25)* Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

1) Montrer que toute valeur propre non nulle de $u \circ v$ est valeur propre de $v \circ u$.

2) Montrer que si E est de dimension finie, alors $u \circ v$ et $v \circ u$ ont même spectre.

3) Dans cette question, $E = \mathbf{R}[X]$, $u(P) = XP$ et $v(P) = P'$.
Montrer que 0 est valeur propre de $u \circ v$ mais pas de $v \circ u$.

Exercice 10 *(Mines-Ponts 25)* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et $E_A = \{X \in \mathbf{C}_{n,1}\,,\ \exists \lambda \in \mathbf{C},\ AX = \lambda X\}$.
Quelle condition doit vérifier le spectre de A pour que E_A soit un espace vectoriel ?

Exercice 11 *(CCINP 25)* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant : $A^2 - 5A + 6I_n = 0$.

1) Montrer que A est semblable à une matrice diagonale D.
2) Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ on pose $f(M) = DM - MD$.
   Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 12 *(CCINP 25)*
Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant : $M^3 - 4M^2 + 4M = 0$ et $\operatorname{tr}(M) = 0$.

Exercice 13 *(Mines-Télécom 25)* Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2$ vérifiant $AB = BA$; et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix}$.

a) Montrer que si $P \in \mathbf{R}[X]$ est scindé à racines simples, alors P' itou.
b) Pour $P \in \mathbf{R}[X]$, exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B.
c) Montrer l'équivalence : M est diagonalisable $\iff$ A est diagonalisable et $B = 0_n$.

Exercice 14 *(Mines-Ponts 25)* Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Montrer que $\chi_A = X^{n-2}(X^2 - a_1 X - b)$ avec $b = a_2^2 + \cdots + a_n^2$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 15 *(Centrale 25)*

a) Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est nilpotente si et seulement si $\chi_A = X^n$.
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que si A est semblable à $2A$, alors A est nilpotente.
c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$. Montrer que A est semblable à $2A$.

Exercice 16 *(CCINP 25)*

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Donner une CNS pour que A soit diagonalisable.
2) Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_{2p})$ la base canonique de $\mathbf{R}^{2p}$ et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^{2p}$ représenté dans cette base par la matrice A définie par : $A_{i,2p+1-i} = \alpha_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant 2p$; et $A_{i,j} = 0$ pour $j \neq 2p+1-i$.
   a) Représenter la matrice A.
   b) Montrer que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant 2p$, le sous-espace $E_i = \operatorname{Vect}(e_i, e_{2p+1-i})$ est stable par f.
   c) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si sa restriction à chacun des E_i l'est.
   d) En déduire une CNS pour que A soit diagonalisable.
3) Que dire en dimension impaire ?

Exercice 17 *(CCINP 25)* Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E de dimension finie.

1) Montrer que si u est diagonalisable alors u^2 itou.
2) Montrer que la réciproque est fausse.
3) Soit $\lambda \in \mathbf{C}^*$. Montrer que : $\operatorname{Ker}(u^2 - \lambda^2 \mathrm{Id}_E) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \bigoplus \operatorname{Ker}(u + \lambda \mathrm{Id}_E)$.
4) Montrer que si u^2 est diagonalisable et inversible, alors u est diagonalisable et inversible.
5) Montrer que si u est diagonalisable alors $P(u)$ est diagonalisable pour tout polynôme P.
6) Soit P un polynôme annulateur de u. On suppose que $P'(u)$ est inversible.
   Montrer que les valeurs propres de u sont racines simples de P.
7) On suppose qu'il existe un polynôme Q tel que $Q(u)$ soit diagonalisable et $Q'(u)$ inversible.
   Montrer que u est diagonalisable.