

Exercice 1 (*Mines-Télécom 2018*) Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \ln(t) dt$.

- Montrer que f est de classe C^1 sur un intervalle à déterminer.
- Montrer que f vérifie sur cet intervalle l'équation : $f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = -\frac{1}{x^2}$.
- Montrer qu'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) = \frac{c-\ln(x)}{x}$.

Exercice 2 (*Mines-Télécom 2025*) Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+e^{tx}+e^{-t}}$.

- Déterminer le domaine de définition D de f .
- Montrer que f est continue sur D .
- Étudier le comportement de f aux bornes de D .

Exercice 3 (*CCINP 2017*) Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2} dt$.

- Déterminer le domaine de définition D de f .
- Montrer que f est de classe C^1 sur D . En déduire une expression de $f(x)$.

Exercice 4 (*CCINP 2025*) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

- Déterminer l'image et le noyau de A .
- Déterminer les valeurs propres de A .
- La matrice A est-elle diagonalisable?

Exercice 5 (*Mines-Télécom 2023*) Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Déterminer le rang de T , puis ses valeurs propres.
- La matrice T est-elle diagonalisable?