

Exercice 1 (Mines-Télécom 2018) Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \ln(t) dt$.

- a) Montrer que f est de classe C^1 sur un intervalle à déterminer.
- b) Montrer que f vérifie sur cet intervalle l'équation : $f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = -\frac{1}{x^2}$.
- c) Montrer qu'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) = \frac{c - \ln(x)}{x}$.

Exercice 2 (Mines-Télécom 2025) Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + e^{tx} + e^{-t}}$.

- a) Déterminer le domaine de définition D de f .
- b) Montrer que f est continue sur D .
- c) Étudier le comportement de f aux bornes de D .

Exercice 3 (CCINP 2017) Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2} dt$.

- a) Déterminer le domaine de définition D de f .
- b) Montrer que f est de classe C^1 sur D . En déduire une expression de $f(x)$.

Exercice 4 (CCINP 2025) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

- a) Déterminer l'image et le noyau de A .
- b) Déterminer les valeurs propres de A .
- c) La matrice A est-elle diagonalisable?

Exercice 5 (Mines-Télécom 2023) Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Déterminer le rang de T , puis ses valeurs propres.
- b) La matrice T est-elle diagonalisable?