Exercice 1 *(CCINP 2023)* Soit $a \in \mathbf{R}$ et $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2a & a+5 \end{pmatrix}$.

1) Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles M_a est diagonalisable ?
2) Trouver P telle que $M_{-1} = P\,D\,P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
3) Trouver les matrices A telles que $A^2 = M_{-1}$.

Exercice 2 *(Mines-Ponts 2025)* Soit $P = X^5 - 4X^4 + 2X^3 + 8X^2 - 8X$.

1) En remarquant que $P(2) = P'(2) = 0$, trouver la décomposition de P en facteurs irréductibles.
2) Trouver les matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $P(M) = 0$ et $\mathrm{tr}(M) = 0$.

Exercice 3 *(Mines-Ponts 2025)*
Soit A la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont les coefficients sont tous nuls sauf ceux de la dernière ligne et de la dernière colonne, qui valent 1. Montrer que A est diagonalisable, puis diagonaliser A.