

Théorème Soit a, b, c , des applications continues d'un intervalle I dans $\mathbf{K}$. $\forall (t_0, \alpha, \beta) \in I \times \mathbf{K} \times \mathbf{K}$, il existe une unique solution au *problème de Cauchy* :
$$\begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \\ y(t_0) = \alpha \\ y'(t_0) = \beta \end{cases}$$

Corollaire L'ensemble des solutions de l'équation homogène est un $\mathbf{K}$ -ev de dimension 2.

Remarque Toutes les solutions de l'équation complète sont obtenues à partir d'une solution particulière par addition d'une solution de l'équation homogène.



Exercice 1 (ENSEA 23) On s'intéresse à l'équation différentielle $(E) : xy''(x) + xy'(x) - y(x) = 0$.

- Trouver une fonction polynomiale vérifiant (E) .
- Pour $x > 0$ on pose $G(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^2} dt$. Dresser le tableau de variation de G sur $]0, +\infty[$.
- Soit f une fonction de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et $S : x \mapsto xf(x)$.
Montrer que S est solution de (E) ssi f' vérifie une équation différentielle d'ordre 1.
- Résoudre (E) .

Exercice 2 (CCINP 25) Soit (E) l'équation différentielle : $t^2 y''(t) + 3ty'(t) + y(t) = t + \frac{1}{t}$.

- Énoncer le théorème de Cauchy linéaire.
- On pose pour tout réel x , $g(x) = f(e^x)$. Montrer que f est solution de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$ si et seulement si g est solution d'une équation différentielle d'ordre 2 que l'on déterminera.
- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E) .

Exercice 3 (Centrale 25)

Soit f une solution de l'équation différentielle $y''(t) + e^{it}y(t) = 0$.

Montrer que f est 2π -périodique si et seulement si $f(0) = f(2\pi)$ et $f'(0) = f'(2\pi)$.

Exercice 4 (Centrale 25)

- Soit g une fonction continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$ et $h : x \mapsto \int_0^x \sin(x-t)g(t) dt$.

Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^2$ puis simplifier $h''(x) + h(x)$.

- Soit g une fonction continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que :
 $\forall x \geq 0, f(x) \leq a + \int_0^x f(t) dt$. Montrer qu'alors $f(x) \leq ae^x$ pour tout $x \geq 0$.

- Pour $\lambda \in \mathbf{R}$, on note Φ_λ la solution du problème de Cauchy :
$$\begin{cases} y''(x) + (1 - \sin(\lambda x))y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. Montrer que $\lambda \mapsto \Phi_\lambda(x_0)$ est lipschitzienne.

Exercice 5 (Mines-Ponts 25) On considère l'équation différentielle $(E) : y''(x) = (x^2 - 1)y(x)$.

- Montrer que si y est une solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ (respectivement $y'(0) = 0$) alors y est impaire (respectivement paire).
- Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbf{R}$ la fonction $x \mapsto e^{ax^2}$ est-elle solution de (E) ?
- Soit $f : x \mapsto u(x)e^{-x^2/2}$. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si u est solution d'une équation différentielle à préciser.
- Exprimer l'ensemble des solutions de (E) à l'aide de $v : x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$.

Exercice 6 (Mines-Ponts 25)

Trouver f continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que l'équation $y''(x) + y'(x) + f(x)y(x) = 0$ admette une base de l'ensemble des solutions de la forme (g, g^2) avec g de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$.