Définition 1 Une série entière (ou série de puissances entières) est une série de fonctions de variable a priori complexe z, $\sum a_n z^n$ où (a_n) est une suite de nombres a priori complexes.

Lemme 1 L'ensemble des $r \in \mathbf{R}_+$ pour lesquels la suite $(a_n r^n)$ est bornée est un intervalle.

Définition 2 Le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est la borne supérieure de cet intervalle.

Lemme 2 *(lemme d'Abel)*
Si la suite $\left(a_n z_0^n\right)$ est bornée, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument pour $|z| < |z_0|$.

Proposition 1 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R, et $z_0 \in \mathbf{C}$.
Si $|z_0| > R$, alors $\sum a_n z_0^n$ diverge grossièrement. Si $|z_0| < R$, alors $\sum a_n z_0^n$ converge absolument.

Corollaire 1 Le rayon de convergence de la somme de deux séries entières est supérieur ou égal au plus petit des deux rayons, avec égalité si les deux rayons sont distincts.

Remarque 1 Soit R_1 le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et R_2 celui de $\sum b_n z^n$.
Si $a_n \in O(b_n)$, alors $R_1 \geqslant R_2$. En particulier, si $a_n \sim b_n$, alors $R_1 = R_2$.

Remarque 2 La règle de D'Alembert peut également s'avérer intéressante pour la détermination du rayon de convergence, par exemple pour $\sum_{n\geqslant 1} n^a z^n$ où a est réel ou complexe.

Définition 3 On appelle produit de Cauchy de deux séries de termes généraux complexes u_n et v_n la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Proposition 2 Le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes donne une série absolument convergente dont la somme est le produit des deux premières sommes.

Corollaire 2 Rayon de convergence et somme du produit de Cauchy de deux séries entières.

Proposition 3 Une série entière de rayon de convergence R converge normalement sur tout disque de rayon *strictement* plus petit que R.

Corollaire 3 La somme d'une série entière est continue sur le disque *ouvert* de convergence.

Proposition 4 Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Corollaire 4 Une série entière et sa dérivée (formelle) ont même rayon de convergence.

Corollaire 5 La somme d'une série entière de rayon de convergence R est C^∞ sur $]-R, R[$.

Définition 4 On dit qu'une fonction f est développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ lorsqu'il existe $(a_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ telle que : $\forall x \in]-r, r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Remarque 3 Alors f est nécessairement de classe C^∞ sur $]-r, r[$ et $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Exemples fondamentaux

- $\forall z \in \mathbf{C},\ \exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\cos(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$, $\sin(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\forall x \in [-1, 1[,\ \ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ et $\operatorname{Arctan}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$
- $\forall a \in \mathbf{C},\ \forall x \in]-1, 1[,\ (1+x)^a = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \beta(a, n)\, x^n$ où $\beta(a, n) = \dfrac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$