

Exercice 1 (Mines-Télécom 25) Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{4n+2}$.

- Donner le rayon de convergence R de cette série entière.
- Montrer que f est continue sur $] -R, R[$.
- Trouver une expression de $f(x)$ pour $x \in] -R, R[$.

Exercice 2 (Mines-Télécom 25) Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $z_n = (1+i)^n$.

- Calculer le module et un argument de z_n .
- Montrer que la fonction $x \mapsto e^x \cos(x)$ est développable en série entière sur $\mathbf{R}$.
- On écrit $e^x \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n \in \mathbf{N}$.

Exercice 3 (Mines-Télécom 25) Soit (a_n) définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k}}{k!}$ pour $n \in \mathbf{N}$.

- Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \leq a_n \leq 1$.
Que peut-on en déduire concernant le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$?
- Trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
- Résoudre cette équation différentielle pour trouver une expression de $S(x)$.

Exercice 4 (CCINP 25) Pour $k \in \mathbf{N}$ et $n \in \mathbf{N}^*$ on pose : $I_{k,n} = \int_0^{+\infty} t^k e^{-nt} dt$ et $a_n = I_{n,n}$.

- Déterminer la limite de $(1 - \frac{1}{n})^n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- Montrer que l'intégrale $I_{k,n}$ est bien définie et calculer explicitement $I_{k,n}$ en fonction de k et n .
- Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.
- Déterminer la nature de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^n$ et de $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n e^n$.
- Montrer que, pour tout $x \in] -R, R[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{+\infty} \frac{tx}{e^t - tx} dt$.

Exercice 5 (CCINP 25) On définit (a_n) par $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ et $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

- Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $|a_n| \leq 4^n$.
Que peut-on en déduire concernant le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$?
- Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que : $\forall x \in] -r, r[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{2x^2 - 3x + 1}$.
- En déduire l'expression de a_n .

Exercice 6 (CCINP 25) Soit $\sum a_n z^n$, une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

- On note R' le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$ où $b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}$.
- Montrer que $R' \geq \max(1, R)$.
 - Montrer que si $R' > 1$ alors $R' = R$.
 - Montrer que $R' = \max(1, R)$.

Exercice 7 (Mines-Ponts 25)

Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{(n+1)(n+2)}{2^n} x^n$ puis la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n}$.

Exercice 8 (Mines-Ponts 25)

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note a_n le nombre de permutations de $\{1, \dots, n\}$ sans point fixe. On pose $a_0 = 1$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$.
- Montrer que le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ est au moins égal à 1.
- Calculer $e^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ pour $x \in] -1, 1[$. En déduire une expression de a_n .

Exercice 9 (Mines-Pont 25) On pose $f(0) = 1$ et, pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

- Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.
- Montrer que f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$.
- Donner le développement limité à l'ordre 5 de f^{-1} au voisinage de 1.