Exercice 1 *(CCINP 2025)* Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) La matrice A est-elle diagonalisable ?

b) Trigonaliser explicitement A.

c) Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x'(t) = -x(t) - 4y(t) + \mathrm{sh}(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) + t\mathrm{e}^t \end{cases}$

Exercice 2 *(CCINP 2024)* Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathscr{S}$ le système différentiel : $X'(t) = AX(t)$.

a) Montrer que A est diagonalisable.

b) Expliciter P et D telles que $A = PDP^{-1}$.

c) On pose $U(t) = P^{-1}X(t)$. Déterminer le système différentiel vérifié par U et le résoudre. En déduire les solutions de $\mathscr{S}$.

d) Soit $\mathscr{S}'$ le système différentiel : $X''(t) = AX(t)$. Déterminer les solutions réelles de $\mathscr{S}'$.

e) Soit E l'ensemble des solutions réelles bornées de $\mathscr{S}'$.
Montrer que E est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

Exercice 3 *(Mines-Télécom 2024)* Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$

Exercice 4 *(Centrale 2025)* Soit f, u et v trois endomorphismes d'un espace de dimension finie.
On suppose qu'il existe des scalaires a et b tels que :
$ab(a-b) \neq 0$, $f = au + bv$, $f^2 = a^2 u + b^2 v$ et $f^3 = a^3 u + b^3 v$.

a) Donner un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$ diagonalisable et non nul vérifiant ces conditions.

b) Montrer que f est diagonalisable.

c) Montrer que u et v sont des projecteurs qui commutent.

Exercice 5 *(Mines-Télécom 2023)* Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et $B = \begin{pmatrix} I_n & O_n \\ A & A \end{pmatrix}$.
Montrer que si B est diagonalisable alors A est diagonalisable et $I_n - A$ inversible. Réciproque ?

Exercice 6 *(TPE-IVP 2018)* On considère l'équation différentielle (E) : $(1+x^2)y''(x) - 2y(x) = 0$.

a) Montrer qu'une solution polynomiale de (E) est nécessairement de degré inférieur ou égal à 2.

b) Trouver une telle solution $f(x)$ puis, en posant $y(x) = g(x)f(x)$, toutes les solutions de (E).