Exercice 1 *(ENSEA 2021)*
Déterminer les solutions de $xy''(x)-(x+1)y'(x)+y(x)=0$ développables en série entière.

Exercice 2 *(Mines-Ponts 21)*
Soit (a_n) définie par : $a_0=1$, $a_1=0$ et pour $n\in\mathbf{N}$, $a_{n+2}=(n+1)(a_n+a_{n+1})$.

a) Montrer que $(n-2)!\leqslant a_n\leqslant n!$ pour tout $n\geqslant 2$.

b) En déduire le rayon de convergence R de $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$.

c) Montrer que : $\forall x\in\,]-R,R[$, $(1-x)S'(x)-xS(x)=0$. En déduire $S(x)$.

Exercice 3 *(CCINP 25)* Soit $a_n=\int_0^1\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n\mathrm{d}t$.

1) Montrer que la suite (a_n) est convergente et préciser sa limite.

2) Montrer que la série de terme général $(-1)^n a_n$ est convergente.

3) Soit R le rayon de convergence de la série de terme général a_nx^n et f sa somme.

   a) Montrer $a_n\geqslant\frac{1}{2n+1}$; en déduire la valeur de R.

   b) Montrer que $(2n+3)a_{n+1}=1+(n+1)a_n$.

   c) Trouver une équation différentielle satisfaite par f.