Définition 1 On appelle *tribu* sur un ensemble Ω une partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ telle que : (i) $\Omega \in \mathscr{A}$
(ii) $\forall\, A \in \mathscr{A},\ \bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathscr{A}$ (iii) pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$, $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$
L'ensemble Ω est *l'univers des possibles*. Les éléments de $\mathscr{A}$ sont les *événements mesurables*. Deux événements A et B sont dits *incompatibles* lorsque $A \cap B = \varnothing$. Un *système complet* d'événements est une suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles dont la réunion est égale à Ω.

Remarque 1 Si $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω, $\varnothing \in \mathscr{A}$ et $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$ pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathscr{A}^{\mathbf{N}}$.

Définition 2 Si $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω, une *probabilité* sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est une application P de $\mathscr{A}$ dans $[0,1]$ vérifiant : $P(\Omega) = 1$ et, pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'évènements deux à deux incompatibles, $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ (σ-additivité). On dit alors que $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un *espace probabilisé*.
Un évènement dont la probabilité est égale à 1 (resp.0) est dit *presque sûr* (resp. *négligeable*).
On dit qu'un suite d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est un système *quasi-complet* lorsque ces évènements sont deux à deux incompatibles et que la somme de leurs probabilités vaut 1.

Remarque 2 Probabilité de l'évènement contraire et de la réunion de deux évènements.

Proposition 1 Une probabilité est croissante pour l'inclusion.

Proposition 2 *(Continuité croissante)* Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'évènements telle que, pour tout n, $A_n \subset A_{n+1}$, alors $P(A_n)$ tend vers $P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$ quand n tend vers l'infini.

Corollaire 1 *(Continuité décroissante)* Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'évènements telle que, pour tout n, $A_{n+1} \subset A_n$, alors $P(A_n)$ tend vers $P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$ quand n tend vers l'infini.

Corollaire 2 *(Sous-additivité)*
Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'évènements quelconque, $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

Définition 3 Si A et B sont des évènements et si $P(B) \neq 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par : $P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Remarque 3 P_B définit bien une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Proposition 3 *(Formule des probabilités composées)* Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des évènements tels que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$ alors : $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\, P_{A_1\cap A_2}(A_3) \ldots P_{A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n)$.

Proposition 4 *(Formule des probabilités totales)* Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est un système complet (ou quasi) d'évènements alors : $P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n)$ $(\forall\, B \in \mathscr{A})$.

Corollaire 3 *Formule de Bayes*

Définition 4 Des évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont dits *mutuellement indépendants* lorsque, pour toute partie I de $[\![1, n]\!]$, $P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} P(A_i)$.

Remarque 4 Des évènements peuvent être 2 à 2 indépendants sans l'être mutuellement.

Proposition 5 Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants alors $A_1, A_2, \ldots, \overline{A_n}$ le sont aussi.

Définition 5 Si $\mathscr{A}$ est une tribu sur un ensemble Ω, une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est une application X sur Ω, d'image finie ou dénombrable, telle que : $\forall\, x \in X(\Omega)$, $X^{-1}\left(\{x\}\right) \in \mathscr{A}$.
Si X est une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, on appelle loi de X l'application $P_X : \mathscr{P}(X(\Omega)) \to [0,1]$, $U \mapsto P(X \in U) = P\left(X^{-1}(U)\right)$.

Remarque 5 P_X est une probabilité sur $(X(\Omega)$, entièrement déterminée par $\{P(X = x)\}_{x\in X(\Omega)}$.

Lois usuelles : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique, loi de Poisson.

Définition 6 La *loi conditionnelle* de Y sachant A est donnée par $P_A(Y = y) = \frac{P((Y=y)\cap A)}{P(A)}$.

Proposition 6 Si X et Y sont deux variables aléatoires de même loi, alors $f(X)$ et $f(Y)$ aussi.

Proposition 7 Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega,\mathscr{A})$,
alors $Z : w \mapsto (X(w), Y(w))$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega,\mathscr{A})$.

Définition 7 La loi du couple (X,Y) est appelée *loi conjointe.*
Elle est déterminée par $\left\{P\big((X,Y)=(x,y)\big)=P\big((X=x)\cap(Y=y)\big)\ ;\ (x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\right\}$.
Les lois de X et de Y sont appelées *lois marginales.*

Définition 8 Deux variables aléatoires discrètes X et Y sur $(\Omega,\mathscr{A})$ sont dites indépendantes lorsque : $\forall A\subset X(\Omega)$, $\forall B\subset Y(\Omega)$, $P(X\in A, Y\in B)=P(X\in A)P(Y\in B)$. On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Proposition 8 $X \perp\!\!\!\perp Y \iff \forall (x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega),\ P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y)$

Proposition 9 *(Lemme des coalitions)* Si $X_1,\dots,X_n$ sont des v.a.d. indépendantes alors $f(X_1,\dots,X_k)$ et $g(X_{k+1},\dots,X_n)$ sont deux v.a.d. indépendantes.

Définition 9 L'espérance d'une v.a.d. X à valeurs dans $[0,+\infty]$ est définie par :
$\mathrm{E}(X)=\sum_{x\in X(\Omega)} x\,P(X=x)$ (avec la convention $x\,P(X=x)=0$ si $x=+\infty$ et $P(X=+\infty)=0$)
On dit qu'une v.a.d. X à valeurs dans $\mathbf{C}$ est d'espérance finie lorsque la famille $(x\,P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. $\mathrm{E}(X)$ est alors la somme de cette famille. On dit que X est centrée lorsque $\mathrm{E}(X)=0$.

Remarque 6 Positivité de l'espérance pour des v.a.d. à valeurs réelles.

Remarque 7 Si X est à valeurs positives et d'espérance nulle, alors $(X=0)$ est presque sûr.

Remarque 8 Si X est à valeurs dans $\mathbf{N}$, alors $\mathrm{E}(X)=\sum_{n\geqslant 1} P(X\geqslant n)$.

Proposition 10 $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)\,P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Et l'espérance de $f(X)$ est alors la somme de cette famille. *(Formule du transfert)*

Corollaire 4 Linéarité de l'espérance ; croissance de l'espérance.

Corollaire 5 Si $|X|\leqslant Y$ et $\mathrm{E}(Y)<+\infty$ alors X est d'espérance finie et $|\mathrm{E}(X)|\leqslant \mathrm{E}(Y)$.

Proposition 11 Si X et Y sont deux v.a.d. *indépendantes* d'espérances finies, alors XY aussi et $\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.

Proposition 12 Soit X et Y sont deux v.a.d. réelles. Si X^2 et Y^2 sont d'espérances finies, alors XY aussi et $|\mathrm{E}(XY)|\leqslant \sqrt{\mathrm{E}(X^2)\mathrm{E}(Y^2)}$ *(inégalité de Cauchy-Schwarz)*.

Définition 10 Si X et Y sont deux v.a.d. réelles avec X^2 et Y^2 d'espérances finies, on définit :

i) la *variance* de X, $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}\big((X-\mathrm{E}(X))^2\big)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2$

ii) la *covariance* de X et Y, $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$

iii) l'*écart type* de X, $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$ (et l'on dit que X est réduite lorsque $\sigma(X)=1$)

Remarque 9 i) $\forall (a,b)\in\mathbf{R}^2$, $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$ ii) si $\sigma(X)>0$ alors $\frac{X-\mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Proposition 13 $\mathrm{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)=\sum_{k=1}^n \mathrm{V}(X_k)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$

Proposition 14 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Chebychev ; loi faible des grands nombres.

Proposition 15 Si X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbf{N}$, alors la série de terme général $P(X=n)\,t^n$ converge normalement sur $[-1,1]$; et l'on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\,t^n=\mathrm{E}\left(t^X\right)$.

Définition 11 La fonction $G_X(t)$ ainsi définie est appelée *fonction génératrice* de X.

Proposition 16 Si X et Y sont indépendantes, alors $G_{X+Y}=G_X\,G_Y$.

Proposition 17 X est d'espérance finie ssi G_X est dérivable en 1, auquel cas $\mathrm{E}(X)=G'(1)$.