Exercice 1 *(CCINP 2025)* Soit (a_n) définie par : $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_{n+1} + \dfrac{a_n}{n+2}$.

a) Montrer que la suite (a_n) est à termes strictement positifs.

b) Étudier la monotonie de la suite (a_n).

c) Montrer que la série de terme général $a_{n+1} - a_n$ est divergente.

d) Quelle est la limite de a_n quand n tend vers l'infini ?

e) Quel est le rayon de convergence de la série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$?

f) Montrer que S est solution de l'équation différentielle $(x-1)y'(x) + (x+1)y(x) = 0$.

g) Montrer que $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}(n-k+1)$.

h) Déterminer un équivalent de a_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 2 *(Centrale 2025)* Soit (a_n) une suite bornée de nombres complexes et $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

a) Déterminer les rayons de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ et de $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} x^n$.

b) Montrer que $f' = g' - g$; en déduire que $\int_0^x f(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \big(g(x) - f(x)\big)\mathrm{e}^{-x}$.

c) On suppose que $a_n \to 0$. Montrer que $f(x)\mathrm{e}^{-x} \to 0$ quand x tend vers $+\infty$.

d) On suppose que $S_n \to \ell$. Montrer que $g(x)\mathrm{e}^{-x} \to \ell$ quand x tend vers $+\infty$.
En déduire alors la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

e) Pour $a_n = (-1)^n$ calculer $g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} g(x)$.

Exercice 3 *(Centrale 2025)* Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto x - x^2$.

a) Quel est le plus grand intervalle contenant 0 sur lequel f est injective ?

b) Soit g la bijection réciproque de la restriction de f à cet intervalle.
Montrer que g est développable en série entière, en explicitant ce développement.

Exercice 4 *(Mines-Ponts 2024)*

a) Montrer que $g(x) = 1/\cos(x)$ est développable en série entière.

b) Donner un encadrement du rayon de convergence de cette série entière.

Exercice 5 *(Mines-Ponts 2019)* Soit $f(t) = \cos\left(\frac{\arcsin t}{2}\right)$

a) Donner le domaine de définition de f puis une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par f.

b) Déterminer le développement de f en série entière.

c) Étudier le comportement de ce développement aux bornes de l'intervalle de convergence.