Exercice 1 *(Mines-Télécom 25)* Une urne contient initialement une boule blanche. On lance une pièce équilibrée. Si on tombe sur pile, on rajoute une boule noire dans l'urne et on relance la pièce. Si on tombe sur face, alors on tire une boule au hasard dans l'urne et le jeu s'arrête. Quelle est la probabilité de tirer la boule blanche ?

Exercice 2 *(Mines-Télécom 25)* On suppose que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\alpha\lambda^n$ est la probabilité qu'une famille ait exactement n enfants, avec $0 < \lambda < 1$ et $(1+\alpha)\lambda < 1$. La probabilité qu'un enfant soit un garçon est $q = 1 - p$ où p est la probabilité que ce soit une fille.

a) Calculer la probabilité qu'une famille n'ait aucun enfant.

b) Pour $x \in]-1,1[$, calculer $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$, puis la probabilité qu'une famille ait exactement k garçons.

c) Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins 2 garçons, sachant qu'elle en a au moins un.

Exercice 3 *(X 25)* Soit ε, X et Y trois variables aléatoires indépendantes. On suppose que ε suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$; et que X et Y suivent une loi géométrique de paramètre p.

a) Calculer la probabilité que $\begin{pmatrix} (2\varepsilon-1)X & Y \\ Y & (2\varepsilon-1)X \end{pmatrix}$ soit inversible.

b) Calculer la probabilité que $\begin{pmatrix} (2\varepsilon-1)X & Y \\ Y & (2\varepsilon-1)X \end{pmatrix}$ soit à valeurs propres strictement positives.

Exercice 4 *(Mines-Ponts 25)* Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $X_n \sim \mathscr{P}(\lambda_n)$ avec $\sum \lambda_n$ convergente.

a) Déterminer la probabilité de l'évènement "la suite (X_n) est nulle à partir d'un certain rang".

b) Montrer que $X = \lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{X_n}$ est presque sûrement définie.

Exercice 5 *(Mines-Télécom 25)* Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$.
On appelle *taux d'arrêt* de X la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $x_n = P(X = n, X \geqslant n)$.

a) Vérifier que l'on définit une loi de probabilité en posant : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $P(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}$.
Déterminer le taux d'arrêt de cette loi.

b) Si (x_n) est le taux d'arrêt de X, montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $P(X \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - x_k)$.

c) On suppose que X a un taux d'arrêt constant. Déterminer la loi de X et son espérance.

Exercice 6 *(CCINP 25)* Une entreprise reçoit par téléphone des commandes pour deux produits, A et B, chaque appel étant indépendant des précédents. La probabilité qu'un appel soit pour le produit A est $0,2$ tandis qu'elle est de $0,8$ pour le produit B. On définit les variables aléatoires suivantes :
X_A = nombre d'appels consécutifs nécessaires pour obtenir une première commande du produit A ;
X_B = nombre d'appels consécutifs nécessaires pour obtenir une première commande du produit B ;
L = longueur de la première séquence d'appels consécutifs commandant un même produit.
Par exemple, si la suite d'appels est `AAABAABB`, alors $X_A = 1$, $X_B = 4$ et $L = 3$.

1) a) Déterminer la loi de X_A, puis son espérance et sa variance.

   b) Mêmes questions pour X_B.

2) a) Déterminer $P(X_A = n+1, L = n)$.

   b) Montrer que $P(L = n) = 0,8\,P(X_A = n) + 0,2\,P(X_B = n)$.

3) Justifier que L admet une espérance et la calculer.

4) a) Les variables X_A et X_B sont-elles indépendantes ?

   b) Les variables X_A et L sont-elles indépendantes ?

Exercice 7 *(Mines-Ponts 25)* On lance une pièce qui donne pile avec la probabilité $2/3$ et face avec la probabilité $1/3$. Soit X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient face au k-ième lancer et 0 sinon. Soit T la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers effectués pour obtenir pour la première fois deux faces consécutifs.

a) Quelles sont les valeurs possibles de T ?

b) On note $p_n = P(T = n)$. Calculer p_1 et p_2.
Pour $n \geqslant 3$, montrer que $\{(X_1 = 1, X_2 = 0), (X_1 = 1, X_2 = 1), X_1 = 0\}$ forme un système complet d'évènements. En déduire que $p_n = \frac{2}{9} p_{n-2} + \frac{2}{3} p_{n-1}$, puis une expression de p_n.

c) Est-ce que T possède une espérance ?

Exercice 8 *(Mines-Ponts 25)* Soit $a > 0$ et $(X_n)_{n \geqslant 2}$ une suite de variables aléatoires indépendantes vérifiant $X_n \sim \mathscr{B}(n^{-a})$. On pose $\tau = \min\{n \geqslant 2,\ X_n = 1\} \in \mathbf{N} \cap \{+\infty\}$.

a) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a pour que $P(\tau = +\infty) = 0$.

b) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a pour que $E(\tau) < +\infty$.

Exercice 9 *(CCINP 25)* On considère deux variables aléatoires X et Y, avec $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.
On suppose que la loi de Y sachant $X = n$ est $\mathscr{B}(n, p)$.

1) Déterminer la loi conjointe de (X, Y) puis la loi de Y. X et Y sont-elles indépendantes ?

2) Déterminer la loi de $Z = X - Y$. Z et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 10 *(Mines-Télécom 25)* On effectue des lancers successifs d'une pièce, qui donne pile avec la probabilité p. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers effectués pour obtenir pile pour la première fois. Et Y celle correspondant à l'obtention d'un deuxième pile.

a) Donner la loi de X et celle du couple (X, Y), en déduire la loi de Y.

b) Soit $Z = (Y-1)^{-1}$. Calculer l'espérance de Z.

Exercice 11 *(CCINP 25)* Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$ vérifiant :
$P(X = k, Y = n) = \binom{n}{k} p\,(1-p)^n 2^{-n}$ pour $k \leqslant n$ et 0 sinon.

a) Déterminer la loi marginale de Y.

b) Du développement en série entière de $\frac{1}{1-x}$, déduire : $\forall k \in \mathbf{N}$, $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

c) Déterminer la loi marginale de X.

d) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 12 *(Mines-Ponts 25)* Soit $a > 0$, $p \in]0,1[$ et X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$ telles que : $\forall (i, j) \in \mathbf{N}^2,\ P(X = i, Y = j) = a p^{ij}$.

a) Déterminer la valeur de a.

b) Déterminer la loi de X et de Y, puis calculer son espérance et sa variance.

c) Calculer la covariance de X et Y.

d) Soit $U = \max(X, Y)$ et $n \in \mathbf{N}$. Déterminer la loi de U sachant $(X + Y = 2n + 1)$.

Exercice 13 *(Centrale 25)* Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1, 1\}$, de lois uniformes ; et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

a) Pour $t \in \mathbf{R}$, justifier que $\exp(tX_n)$ admet une espérance et la calculer.
Montrer que $E(\exp(tX_n)) \leqslant \mathrm{e}^{t^2/2}$ pour tout $(n, t) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{R}$.

b) Justifier que $\exp(tS_n)$ admet une espérance et la calculer.
Déterminer la limite de $E\left(\exp\left(\frac{tS_n}{\sqrt{n}}\right)\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

c) Montrer que : $\forall \varepsilon > 0,\ \forall t > 0,\ P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathrm{e}^{\left(\frac{nt^2}{2} - n\varepsilon t\right)}$. En déduire que $P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$.

Exercice 14 *(CCINP 25)* Soit X suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

a) Montrer que $P(X \leqslant n) = \frac{1}{n!}\int_\lambda^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

b) En déduire un équivalent de $\int_\lambda^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ quand n tend vers $+\infty$.

c) Calculer $G_X(1)$ et $G_X(-1)$. En déduire la probabilité que X soit paire.

Exercice 15 *(Navale 25)* Soit X une variable aléatoire telle que : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ P(X = k) = \frac{k-1}{2^k}$.

a) Vérifier que $\sum_{k\in\mathbf{N}^*} P(X = k) = 1$.

b) Déterminer la fonction génératrice de X et préciser son rayon de convergence.

c) La variable X admet-elle une espérance finie ? Si oui, quelle est sa valeur ?

Exercice 16 *(Mines-Télécom 25)* On considère la suite de polynômes définie par : $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et, pour tout n dans $\mathbf{N}$, $P_{n+2} = \frac{1}{2}(XP_{n+1} + P_n)$.

a) Montrer que P_n définit une fonction génératrice d'une variable aléatoire X_n.

b) Déterminer l'espérance, puis la variance, de cette variable aléatoire.

Exercice 17 *(CCINP 25)*

a) Donner le développement en série entière de $\frac{1}{(1-x)^n}$ pour $n = 1$ puis pour $n \in \mathbf{N}^*$.

b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $p \in]0,1[$, $q = 1-p$ et, pour $k \in \mathbf{N}$, $p_k = \binom{n+k-1}{k} p^n q^k$.
Montrer que l'on définit ainsi une probabilité sur $\mathbf{N}$.

c) Soit X une variable aléatoire vérifiant : $\forall k \in \mathbf{N},\ P(X = k) = p_k$.
Déterminer la fonction génératrice de X, puis calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 18 *(Mines-Ponts 25)* Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. On dit que X est décomposable lorsqu'il existe deux variables aléatoires Y et Z à valeurs dans $\mathbf{N}$, indépendantes et non constantes, telles que $X \sim Y + Z$.

1) Quelle relation a-t-on alors entre G_X, G_Y et G_Z ?

2) On suppose que $X \sim \mathscr{B}(n,p)$. Montrer que X est décomposable si, et seulement si, $n \geqslant 2$.

3) On suppose que $X \sim \mathscr{U}[\![0, n-1]\!]$ pour $n \geqslant 2$.
Montrer que X est décomposable si, et seulement si, n n'est pas premier.

Exercice 19 *(Centrale 25)* Soit $\theta > 0$. Des individus numérotés $1, 2, \ldots$ arrivent successivement dans un restaurant qui abrite une infinité de tables infiniment longues. Le premier individu s'installe à une table puis, lorsque le numéro $k+1$ se présente, il choisit une nouvelle table avec la probabilité $\frac{\theta}{k+\theta}$ ou bien choisit au hasard, avec la probabilité $\frac{1}{k+\theta}$, l'un des k individus déjà attablés et s'assied à la même table. On note K_n la variable aléatoire indiquant le nombre de tables occupées lorsque n individus ont pris place.

1) Déterminer $P(K_n = 1)$.

2) Soit G_n la fonction génératrice de K_n. Montrer que $G_n(x) = \frac{L_n(\theta x)}{L_n(\theta)}$ où $L_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(x+i)$.

3) Calculer $E(K_n)$ et $V(K_n)$ puis en donner des équivalents quand n tend vers l'infini.

4) Étudier le comportement de $\left(\frac{K_n}{\ln n}\right)$ quand n tend vers l'infini.