Exercice 1 *(Mines-Télécom 24)* Soit $f : x \mapsto e^{e^x - 1}$

a) Calculer le développement limité de f à l'ordre 2 en 0.

b) Que vaut $f^{(n)}(0)$ pour $n = 0, 1, 2$?

c) On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$.
Calculer u_1 et u_2 puis montrer que $0 \leqslant u_n \leqslant n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Montrer que le rayon de convergence R de $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$ est non nul.

e) Justifier la dérivabilité de g sur $]-R, R[$ puis montrer que : $\forall x \in]-R, R[,\ g'(x) = e^x g(x)$.

f) En déduire : $\forall x \in]-R, R[,\ g(x) = f(x)$.

Exercice 2 *(CCINP 23)* Soit (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$.

a) Montrer que $0 \leqslant u_n \leqslant 4^{n+1}\, n!$ pour tout n.

b) On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n x^n}{n!}$. Montrer que f est solution de l'équation $y' = y^2$ sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$.

c) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 3 *(Centrale 23)* Soit (a_n) une suite de complexes.
On suppose que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ a un rayon de convergence infini, soit $f(z)$ sa somme.

a) Montrer que : $\forall r > 0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \int_0^{2\pi} f(re^{it})\, e^{-ipt}\, dt = 2\pi a_p r^p$.

b) En déduire que si f est bornée sur $\mathbf{C}$ alors f est constante.

c) On suppose maintenant qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$ tels que : $\forall z \in \mathbf{C},\ |f(z)| \leqslant \alpha |z|^q + \beta$.
Montrer qu'alors f est une fonction polynomiale.

Exercice 4 *(Centrale PC 2017)* Soit A et B deux évènements d'un espace probabilisé.

a) Montrer que $P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(A \cap B)P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B})P(B)$.

b) En déduire que $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leqslant \frac{1}{4}$. Étudier le cas d'égalité.