

Définition 1 On appelle *isométrie vectorielle* tout endomorphisme qui conserve la norme.

Remarque 1 Une isométrie vectorielle est un automorphisme.

Proposition 1 $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie si, et seulement si, u conserve le produit scalaire. Ou encore si, et seulement si, l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée.

Remarque 2 Le spectre réel d'une isométrie est inclus dans $\{-1, 1\}$ et les deux (éventuels) espaces propres sont en somme directe. Toute isométrie diagonalisable est donc une *symétrie orthogonale*.

Définition 2 Une *réflexion* est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Proposition 2 Si $u \in O(E)$ et si F est un sous-espace stable par u , F^\perp l'est aussi.

Proposition 3 L'ensemble $O(E)$ des isométries d'un espace euclidien E constitue un groupe.

Définition 3 Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite *orthogonale* lorsque $A^\top A = I_n$.

Remarque 3 Cela revient à dire que les colonnes (ou les lignes) de A sont orthonormées.

Proposition 4 M est orthogonale $\iff M$ représente une isométrie dans une base orthonormale
 $\iff M$ représente un changement de bases orthonormales

Remarque 4 Le déterminant d'une matrice orthogonale vaut ± 1 . L'ensemble $O_n(\mathbf{R})$ des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ constitue un groupe, dont $SO_n(\mathbf{R}) = O_n(\mathbf{R}) \cap SL_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe.

Proposition 5 $SO_2(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}; t \in \mathbf{R} \right\}$ est un groupe commutatif, isomorphe à \mathbf{U} . Les autres isométries du plan sont des réflexions (par rapport à une droite).

Définition 4 On dit que deux bases orthonormales ont même *orientation* lorsque la matrice de passage de l'une vers l'autre a un déterminant égal à 1. On dit qu'une base orthonormale de \mathbf{R}^n est *directe* lorsqu'elle a la même orientation que la base canonique de \mathbf{R}^n .

Remarque 5 Si E est orienté, le déterminant d'une famille de vecteurs (e_1, \dots, e_n) dans une base orthonormée directe de E ne dépend pas de cette base : c'est le *produit mixte*, noté $[e_1, \dots, e_n]$.

Définition 5 Le *produit vectoriel* dans \mathbf{R}^3 est défini par : $\forall z \in \mathbf{R}^3, [x, y, z] = (x \times y) \cdot z$.

Remarque 6 Expression dans une base orthonormée et propriétés usuelles.

Proposition 6 Pour toute isométrie vectorielle u d'un espace euclidien E de dimension 3, il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon = \det(u)$ et $R \in SO_2(\mathbf{R})$.

Remarque 7 Détermination de l'axe et de l'angle de la rotation lorsque $\det(u) = 1$.

Définition 6 Un endomorphisme u est dit *autoadjoint* lorsque : $\forall (x, y) \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.

Proposition 7 Un endomorphisme est autoadjoint si, et seulement si, sa matrice dans une (et finalement dans toute) base orthonormée est symétrique.

Remarque 8 Les espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont 2 à 2 orthogonaux. Il s'ensuit que pour un projecteur (ou une symétrie) : u orthogonal(e) $\iff u$ autoadjoint(e).

Théorème spectral Tout autoadjoint admet une base orthonormée de vecteurs propres.

Proposition 8 Si u est autoadjoint, $\text{Sp}(u) \subset \mathbf{R}_+$ (resp. \mathbf{R}_+^*) $\iff \forall x \neq 0_E, \langle x, u(x) \rangle \geq 0$ (resp. > 0)

Définition 7 On dit alors que u est *autoadjoint positif* (resp. *autoadjoint défini positif*).

On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs, $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs et, pour les matrices, $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.