Définition 1 On appelle *isométrie vectorielle* tout endomorphisme qui conserve la norme.

Remarque 1 Le spectre réel d'une isométrie est inclus dans $\{-1, 1\}$.
Toute isométrie diagonalisable est donc une *symétrie orthogonale*. Cas particulier des *réflexions*.

Remarque 2 Une isométrie vectorielle est un automorphisme.

Proposition 1 $u \in \mathscr{L}(E)$ est une isométrie si, et seulement si, u conserve le produit scalaire.
Ou encore si, et seulement si, l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée.

Proposition 2 L'ensemble $O(E)$ des isométries d'un espace euclidien E constitue un groupe.

Proposition 3 Si $u \in O(E)$ et si F est un sous-espace stable par u, $F^{\perp}$ l'est aussi.

Définition 2 Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est dite *orthogonale* lorsque $A^\top A = I_n$.

Remarque 3 Cela revient à dire que les colonnes (ou les lignes) de A sont orthonormées.

Proposition 4 M est orthogonale $\iff$ M représente une isométrie dans une base orthonormale
$\iff$ M représente un changement de bases orthonormales

Remarque 4 Le déterminant d'une matrice orthogonale vaut ± 1. L'ensemble $O_n(\mathbf{R})$ des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ constitue un groupe, dont $SO_n(\mathbf{R}) = O_n(\mathbf{R}) \cap SL_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe.

Proposition 5 $SO_2(\mathbf{R}) = \left\{\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}; t \in \mathbf{R}\right\}$ est un groupe commutatif, isomorphe à $\mathbf{U}$.
Les autres isométries du plan sont des réflexions (par rapport à une droite).

Définition 3 On dit que deux bases orthonormales ont même *orientation* lorsque la matrice de passage de l'une vers l'autre a un déterminant égal à 1. On dit qu'une base orthonormale de $\mathbf{R}^n$ est *directe* lorsqu'elle a la même orientation que la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Remarque 5 Si E est orienté, le déterminant d'une famille de vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$ dans une base orthonormée directe de E ne dépend pas de cette base : c'est le *produit mixte*, noté $[e_1, \ldots, e_n]$.

Définition 4 Le *produit vectoriel* dans $\mathbf{R}^3$ est défini par : $\forall z \in \mathbf{R}^3,\ [x, y, z] = (x \times y) \cdot z$.

Remarque 6 Expression dans une base orthonormée et propriétés usuelles.

Proposition 6 Pour toute isométrie vectorielle u d'un espace euclidien E de dimension 3, il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon = \det(u)$ et $R \in SO_2(\mathbf{R})$.

Remarque 7 Détermination de l'axe et de l'angle de la rotation lorsque $\det(u) = 1$.

Définition 5 Un endomorphisme u est dit *autoadjoint* lorsque : $\forall (x, y) \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$.

Proposition 7 Un endomorphisme est autoadjoint si, et seulement si, sa matrice dans une (et finalement dans toute) base orthonormée est symétrique.

Remarque 8 Les espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont 2 à 2 orthogonaux.
Il s'ensuit que pour un projecteur (ou une symétrie) : u orthogonal(e) $\iff$ u autoadjoint(e).

Théorème spectral Tout autoadjoint admet une base orthonormée de vecteurs propres.

Proposition 8 Si u est autoadjoint, $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbf{R}_+$ (resp. $\mathbf{R}_+^*$) $\iff \forall x \neq 0_E,\ \langle x, u(x)\rangle \geqslant 0$ (resp. > 0)

Définition 6 On dit alors que u est *autoadjoint positif* (resp. *autoadjoint défini positif*).
On note $\mathscr{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs, $\mathscr{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs et, pour les matrices, $\mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ et $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.