Exercice 1 *(Mines-Télécom 2021)* Soit X une variable aléatoire de fonction génératrice $G_X(t) = a\mathrm{e}^{1+t^2}$. Déterminer a puis la loi de X, son espérance et sa variance éventuelles.

Exercice 2 *(CCINP 2021)* Soit X et Y deux v.a.i. à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi, admettant un moment d'ordre deux, telles que $Z = X + Y + 1$ suive une loi géométrique de paramètre p.

a) Déterminer l'espérance et la variance de X en fonction de p.

b) Déterminer la fonction génératrice de X. En déduire la loi de X.

Exercice 3 *(CCINP 2019)* Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires 2 à 2 indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

a) Les variables Y_n sont-elles deux à deux indépendantes ?

b) Déterminer $E(M_n)$ et $V(M_n)$ puis montrer que : $\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} P\left(|M_n - 2p| \geqslant \varepsilon\right) = 0$.

Exercice 4 *(Mines-Ponts 2021)*
Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p.

a) Déterminer la loi de $Y = \min(X_1, \dots, X_n)$. Montrer que Y admet une espérance et la déterminer.

b) Déterminer la loi de $Z = \max(X_1, \dots, X_n)$. Montrer que Z admet une espérance et la déterminer.

Exercice 5 *(Mines-Ponts 2021)* Soit X et Y deux variables aléatoire discrètes indépendantes, de même loi, à valeurs réelles ; et f et g deux applications croissantes de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

a) Montrer que la variable aléatoire $\big(f(X) - f(Y)\big)\big(g(X) - g(Y)\big)$ est à valeurs positives.

b) En déduire que la covariance de $f(X)$ et $g(X)$ est positive ou nulle.

c) Soit (a_n) et (b_n) deux suites croissantes de réels. Montrer que : $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$.