

Exercice 1 (Navale 25) Soit E un espace euclidien.

On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est une similitude vectorielle s'il existe une isométrie v et $\lambda > 0$ tels que $f = \lambda v$.

- 1) Montrer que toute similitude vectorielle conserve l'orthogonalité.
- 2) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ conservant l'orthogonalité.
 - a) Si a et b sont deux vecteurs unitaires, que vaut $\langle a + b, a - b \rangle$?
 - b) Montrer que g est une similitude vectorielle.

Exercice 2 (Mines-Télécom 25) Soit $M \in GL_n(\mathbf{R})$ vérifiant $M^T = M^3$.

- a) Montrer que $N = M^4$ est symétrique.
- b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, $(NX|X) > 0$.
- c) Montrer que $N^3 = N$, en déduire que M est orthogonale.
- d) Pour $n = 2$, déterminer toutes les matrices solutions de l'équation initiale.

Exercice 3 (Mines-Télécom 25) Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E . Montrer que deux des propriétés suivantes entraînent la troisième :

- (i) u est une isométrie (ii) $u^2 = -\text{id}$ (iii) pour tout $x \in E$, $\langle u(x)|x \rangle = 0$.

Exercice 4 (Centrale 25)

- a) Exposer, en le justifiant, l'algorithme de Gram-Schmidt.
- b) Soit $A \in GL_n(\mathbf{R})$.
Montrer qu'il existe une matrice U orthogonale et une matrice T triangulaire telles que $A = UT$.
- c) Établir l'unicité d'un tel couple de matrices (U, T) .

Exercice 5 (ENSEA 25) Dans \mathbf{R}^3 usuel, on se donne un vecteur unitaire \vec{n} et un angle θ .

- 1) Montrer que la rotation Φ d'angle θ et d'axe dirigé par \vec{n} a pour expression :

$$\Phi(\vec{u}) = (\cos \theta) \vec{u} + (1 - \cos \theta)(\vec{u} \cdot \vec{n}) \vec{n} + (\sin \theta)(\vec{n} \wedge \vec{u})$$
- 2) Donner l'expression de la matrice de Φ dans la base canonique pour $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^\perp$.

Exercice 6 (ENSEA 25) Dans un espace euclidien E , soit a et b deux vecteurs unitaires et non colinéaires. Pour tout x de E on pose : $f(x) = \langle a, x \rangle a + \langle b, x \rangle b$.

- a) Montrer que u est un endomorphisme autoadjoint de E puis déterminer le noyau de f .
- b) Calculer $f(a + b)$ et $f(a - b)$ puis donner les éléments propres de f .

Exercice 7 (Mines-Télécom 25)

Soit p et q deux projecteurs orthogonaux, on pose $f = p \circ q \circ p$ et $g = q \circ p \circ q$.

- a) Montrez que f et g sont des endomorphismes auto-adjoints.
- b) Montrer que f et g sont positifs.
- c) Montrer que f et g ont les mêmes valeurs propres non nulles.
- d) Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(q \circ p)$ et que $\text{Ker}(g) = \text{Ker}(p \circ q)$.
- e) Démontrer que $f = g$ si et seulement si p et q commutent.

Exercice 8 (Mines-Ponts 25)

- a) Comparer $\text{tr}(A)$ et $\text{tr}(AB)$ pour $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ et $B \in O_n(\mathbf{R})$.
- b) Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, établir la convergence de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$. On exprime la valeur de cette somme.
- c) On admet que si $MN = NM$, alors $\exp(M + N) = \exp(M) \exp(N)$.
Montrer que si B est antisymétrique alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\exp(xB) \in O_n(\mathbf{R})$.

Exercice 9 (Mines-Ponts 25)

Montrer que si U et V sont dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$, alors $\det(U + V) \geq \det(U) + \det(V)$.