Exercice 1 *(Navale 25)* Soit E un espace euclidien.
On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est une similitude vectorielle s'il existe une isométrie v et $\lambda > 0$ tels que $f = \lambda v$.

1) Montrer que toute similitude vectorielle conserve l'orthogonalité.
2) Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ conservant l'orthogonalité.
   a) Si a et b sont deux vecteurs unitaires, que vaut $\langle a+b, a-b\rangle$?
   b) Montrer que g est une similitude vectorielle.

Exercice 2 *(Mines-Télécom 25)* Soit $M \in GL_n(\mathbf{R})$ vérifiant $M^\top = M^3$.

a) Montrer que $N = M^4$ est symétrique.
b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, $(NX|X) \geqslant 0$.
c) Montrer que $N^3 = N$, en déduire que M est orthogonale.
d) Pour $n = 2$, déterminer toutes les matrices solutions de l'équation initiale.

Exercice 3 *(Mines-Télécom 25)* Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E.
Montrer que deux des propriétés suivantes entraînent la troisième :
(i) u est une isométrie (ii) $u^2 = -\mathrm{id}$ (iii) pour tout $x \in E$, $\langle u(x)|x\rangle = 0$.

Exercice 4 *(Centrale 25)*

a) Exposer, en le justifiant, l'algorithme de Gram-Schmidt.
b) Soit $A \in GL_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe une matrice U orthogonale et une matrice T triangulaire, à coefficients diagonaux strictement positifs, telles que $A = UT$.
c) Établir l'unicité d'un tel couple de matrices (U, T).

Exercice 5 *(ENSEA 25)* Dans $\mathbf{R}^3$ usuel, on se donne un vecteur unitaire $\vec{n}$ et un angle θ.

1) Montrer que la rotation Φ d'angle θ et d'axe dirigé par $\vec{n}$ a pour expression :
   $\Phi(\vec{u}) = (\cos\theta)\vec{u} + (1-\cos\theta)(\vec{u}\cdot\vec{n})\vec{n} + (\sin\theta)(\vec{n} \wedge \vec{u})$
2) Donner l'expression de la matrice de Φ dans la base canonique pour $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^\perp$.

Exercice 6 *(ENSEA 25)* Dans un espace euclidien E, soit a et b deux vecteurs unitaires et non colinéaires. Pour tout x de E on pose : $f(x) = \langle a, x\rangle\, a + \langle b, x\rangle\, b$.

a) Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint de E puis déterminer le noyau de f.
b) Calculer $f(a+b)$ et $f(a-b)$ puis donner les éléments propres de f.

Exercice 7 *(Mines-Télécom 25)*
Soit p et q deux projecteurs orthogonaux, on pose $f = p \circ q \circ p$ et $g = q \circ p \circ q$.

a) Montrez que f et g sont des endomorphismes auto-adjoints.
b) Montrer que f et g sont positifs.
c) Montrer que f et g ont les mêmes valeurs propres non nulles.
d) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(q \circ p)$ et que $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(p \circ q)$.
e) Démontrer que $f = g$ si et seulement si p et q commutent.

Exercice 8 *(Mines-Ponts 25)*

a) Comparer $\mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}(AB)$ pour $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ et $B \in O_n(\mathbf{R})$.
b) Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, établir la convergence de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$. On $\exp(M)$ la valeur de cette somme.
c) On admet que si $MN = NM$, alors $\exp(M+N) = \exp(M)\exp(N)$.
   Montrer que si B est antisymétrique alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\exp(xB) \in O_n(\mathbf{R})$.

Exercice 9 *(Mines-Ponts 25)*
Montrer que si U et V sont dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$, alors $\det(U+V) \geqslant \det(U) + \det(V)$.