**Exercice 1** *(Centrale 2016)* Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ antisymétrique, on pose : $M_A = (I_n - A)^{-1}(I_n + A)$.

a) Justifier l'existence de $M_A$.

b) Écrire en *Python* une fonction prenant $A$ en argument et renvoyant $M_A$.

c) Vérifier sur des exemples que $M_A$ est orthogonale, puis le prouver mathématiquement.

d) Soit $a = (3, 12, -4)^T$ et $A$ la matrice de dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ de l'endomorphisme défini par $x \mapsto a \wedge x$. En utilisant *Python*, montrer que $M_A$ est une matrice de rotation et donner ses éléments caractéristiques.

**Exercice 2** *(Mines-Télécom 2025)* Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$.
Montrer que : $\forall r \in ]-1, 1[,\ E(X) \geqslant \dfrac{1 - G_X(r)}{1 - r}$

**Exercice 3** *(CCINP 2025)*
Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

a) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, montrer que $P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}$.

b) Soit $G_X(t)$ la fonction génératrice de $X$. Montrer que : $\forall a \in \mathbf{R},\ \forall t \geqslant 1,\ P(X \geqslant a) \leqslant \frac{G_X(t)}{t^a}$.

c) En déduire que $P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^{\lambda}$.

**Exercice 4** *(CCINP 2023)* Soit $A \in GL_2(\mathbf{R})$ vérifiant : $A^2 = A^\top$.

a) Trouver un polynôme annulateur de $A$ puis montrer que $A \in O_2(\mathbf{R})$.

b) Calculer le déterminant de $A$ puis donner toutes les matrices solutions.

**Exercice 5** *(Mines-Télécom 2016)* Vérifier que $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale, puis préciser la nature de l'endomorphisme représenté par $A$.