Définition 1 Un point a est dit intérieur à une partie A lorsqu'il existe une boule centrée en a, de rayon non nul, incluse dans A. L'intérieur d'une partie est l'ensemble des points intérieurs à cette partie. Une partie est dit ouverte lorsqu'elle est égale à son intérieur.

Proposition 1 Tout réunion d'ouverts est un ouvert. Idem pour toute intersection *finie*.

Définition 2 Une partie d'un evn est dite fermée lorsque son complémentaire est ouvert.

Proposition 2 Caractérisation séquentielle des parties fermées.

Exemple 1 Une boule ouverte est un ouvert. Une boule fermée, une sphère, sont des fermés.

Définition 3 On dit que x est adhérent à une partie A lorsque $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|a - x\| = 0$.
L'adhérence d'une partie est l'ensemble des points adhérents à cette partie.
On dit qu'une partie est dense lorsque son adhérence est l'espace tout entier.

Proposition 3 Caractérisation séquentielle de l'adhérence.

Remarque 1 Ces trois notions, dites *topologiques*, sont invariantes par normes équivalentes.

Définition 4 Limite d'une fonction en un point adhérent à son ensemble de définition.

Proposition 4 Caractérisation séquentielle de la limite.

Proposition 5 Opérations algébriques sur les limites.

Proposition 6 Soit f une application d'une partie A d'un espace normé E, à valeurs dans une partie B d'un espace normé F, et a un point adhérent à A. Si $f(x)$ tend vers b quand x tend vers a, alors b est adhérent à B. Et si, de plus, g est une application de B dans un espace G admettant une limite c en b, alors $\left(g \circ f\right)(x)$ tend vers c quand x tend vers a. (composition des limites)

Remarque 2 Continuité, continuité des fonctions lipschitziennes.

Théorème 1 Toute application linéaire sur un espace de dimension finie est lipschitzienne.

Théorème 2 Toute application *polynomiale* sur un espace de dimension finie est continue.

Corollaire Continuité de toute application multilinéaire sur un produit d'espaces de dimensions finies, continuité du déterminant, continuité du produit matriciel.

Proposition 7 L'image réciproque d'un ouvert (resp. d'un fermé) par une application continue est une partie ouverte (resp. fermée) de l'espace de départ.

Exemple 2 Si f est continue à valeurs réelles alors $\{x \in E, f(x) > 0\}$ est une partie ouverte, tandis que $\{x \in E, f(x) \geqslant 0\}$ et $\{x \in E, f(x) = 0\}$ sont des parties fermées.

Théorème 3 Toute fonction continue sur une partie fermée bornée non vide d'un espace de dimension finie, à valeurs réelles, est bornée et atteint ses bornes.