

1262. On identifie $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^2$. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. On pose $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); \forall X \in \mathbb{R}^2, \|AX\| \leq \|X\|\}$. On dit que $A \in \mathcal{C}$ est un point extrémal de $\mathcal{C}$ lorsque $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{C}, A = \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2 \Rightarrow A = B_1 = B_2$.

a) Montrer $\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}$.

b) i) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $R \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$ telle que $AR \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

ii) En déduire qu'il existe $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\Omega_1 A \Omega_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

iii) On suppose $A \in \mathcal{C}$. Montrer que a et b appartiennent à $[-1, 1]$.

c) Montrer que l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{C}$ est $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.

1263. a) Soient $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M . Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ind. Considérer $\bar{Z}^T M Z$, où Z est un vecteur propre associé à λ .

b) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 1 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

i) Calculer $\text{tr}(A)$ et $\text{tr}(A^2)$.

ii) Donner les valeurs propres et vecteurs propres de A .

Analyse

1264. On s'intéresse aux suites (U_n) où U_0 et U_1 sont positifs et vérifient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+2} = \frac{1}{2} (U_{n+1}^2 + U_n^2)$$

a) Déterminer l'éventuelle limite de (U_n) . Montrer que, si trois termes consécutifs sont égaux, alors la suite (U_n) est constante.

b) Calculer les premiers termes de la suite (U_n) pour différentes valeurs de U_0 et U_1 . Que peut-on en déduire? Pour les suites telles que $U_n \rightarrow +\infty$, s'intéresser à la suite définie par

$$V_n = \frac{1}{2^n} \ln \left(\frac{U_n}{2} \right).$$

c) Comparer les signes de $U_{n+1} - U_n$ et $U_n - U_{n-2}$.

d) On suppose désormais $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non constante. Montrer que, s'il existe n_0 tel que $U_{n_0+1} \geq U_{n_0}$ et $U_{n_0+1} \geq U_{n_0-1}$, alors la suite $(U_n)_{n \geq n_0+1}$ est strictement croissante.

On admet que, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $U_{n+1} \leq U_n$ et $U_{n+1} \leq U_{n-1}$, alors la suite (U_n) est strictement décroissante.

e) Supposons que, quel que soit $N \in \mathbb{N}$, la suite $(U_n)_{n \geq N}$ ne soit pas strictement monotone. Montrer que $U_0 \neq U_1$ et que, si $U_0 < U_1$, alors $U_0 < U_2 < U_3 < U_1$ (vérifier si l'inégalité est stricte ou non). En déduire que la suite (U_n) converge vers 1.

f) Établir, pour une suite $(U_n)_{n \geq 0}$ non constante appartenant à S , l'équivalence des propriétés suivantes :

– il existe un entier $N \geq 0$ tel que $U_N \geq 1$ et $U_{N+1} \geq 1$,

– la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang,

– la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ tend vers $+\infty$.