

Définition 1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbf{R}^n$.

On dit que f est dérivable en t_0 lorsque $\frac{1}{t-t_0} \cdot (f(t) - f(t_0))$ admet une limite quand t tend vers t_0 . Cette limite est alors appelée dérivée de f en t_0 , et notée $f'(t_0)$.

Remarque 1 Cela équivaut à la dérivabilité en t_0 des coordonnées de f dans la base canonique.

Remarque 2 Cela revient à dire que f admet un développement limité à l'ordre 1 en t_0 .

Proposition 1 Une combinaison linéaire d'applications dérivables en t_0 est dérivable en t_0 .

Proposition 2 Si L est une application linéaire sur $\mathbf{R}^n$ et f dérivable en t_0 alors $L \circ f$ est dérivable en t_0 , avec $(L \circ f)'(t_0) = L(f'(t_0))$.

Proposition 3 Si M est multilinéaire et $f_1, \dots, f_p$ dérivables en t_0 alors $g: t \mapsto M(f_1(t), \dots, f_p(t))$ est dérivable en t_0 , avec $g'(t_0) = \sum_{k=1}^p g_k(t_0)$ où $g_k(t_0)$ est $g(t_0)$ où l'on a remplacé $f_k(t_0)$ par $f'_k(t_0)$.

Exemple : Soit $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \cdots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$. Calculer $\Delta'_n(x)$; en déduire la valeur de $\Delta_n(x)$.

Proposition 4 Si $\varphi: J \rightarrow I$ est dérivable en t_0 et f dérivable en $\varphi(t_0)$ alors $f \circ \varphi$ est dérivable en t_0 , avec $(f \circ \varphi)'(t_0) = \varphi'(t_0) \cdot f'(\varphi(t_0))$.

Définition 2 Pour $k \geq 1$, on dit que f est de classe C^k sur I lorsque f est dérivable sur I et f' de classe C^{k-1} sur I . On dit que f est de classe C^∞ lorsqu'elle est de classe C^k pour tout $k \geq 1$.



Exercice 1 (Centrale 2012)

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des applications C de $\mathbf{R}$ dans $SL_4(\mathbf{R})$ dérivables en 0, telles que $C(0) = I_4$.

- Montrer que $\mathcal{C}$ est stable par multiplication.
- En déduire que $H = \{C'(0); C \in \mathcal{C}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$.
- Montrer que H contient les matrices $E_{i,j}$ pour $i \neq j$; ainsi que $E_{1,1} - E_{i,i}$ pour $2 \leq i \leq 4$.
- Montrer que H est l'ensemble des matrices de trace nulle.

Exercice 2 (TPE-IVP 2019)

Soit M une application de classe C^1 de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant : $\forall t \in \mathbf{R}, M^2(t) = M(0) = I_n$.

- Montrer que $M(t)$ est diagonalisable pour tout réel t .
- Montrer que $M'(t) = -M(t)M'(t)M(t)$. En déduire que la trace de $M(t)$ est constante.
- Déterminer $M(t)$ pour $t \in \mathbf{R}$.