

Définition 1 Soit f une application d'un ouvert U d'un espace de dimension finie E dans $\mathbf{R}$. On dit que f est dérivable en un point a de U suivant le vecteur v lorsque l'application $t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0. Cette dérivée est alors notée $D_v f(a)$.

Définition 2 Si U est un ouvert de $\mathbf{R}^p$ et $a = (x_1, \dots, x_p) \in U$, on dit que f admet en a une *dérivée partielle* selon la i -ème coordonnée lorsque f est dérivable en a selon le i -ème vecteur de la base canonique. On note alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ (ou $\partial_i f(a)$) la valeur de cette dérivée. On dit enfin que f est de classe C^1 sur U lorsqu'elle admet en tout point de U des dérivées partielles selon toutes les coordonnées, et que : $\forall i, a \mapsto \partial_i f(a)$ est continue sur U .

Théorème 1 Si f est de classe C^1 sur U alors : $\forall a \in U, f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^p h_i \partial_i f(a) + o(\|h\|)$

Définition 3 L'application $df(a) : h \mapsto \sum_{i=1}^p h_i \partial_i f(a)$ est appelée *différentielle* de f en a .

Remarque 1 Il s'agit d'une forme linéaire sur $\mathbf{R}^p$, représentée (pour le produit scalaire canonique) par le *gradient* de f en a , $\nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_p f(a))$.

Remarque 2 Si f est de classe C^1 sur U , alors f est continue sur U .

Remarque 3 Combinaisons linéaires, produit, composition d'applications de classe C^1 .

Proposition 1 Si $g : I \rightarrow E$ est dérivable en t , et si f est de classe C^1 sur un ouvert contenant $g(I)$, alors $f \circ g$ est dérivable en t et $(f \circ g)'(t) = df(g(t))(g'(t)) = \sum_{i=1}^p g'_i(t) \partial_i f(g(t))$.

Corollaire 1 Calcul des dérivées partielles de $(u_1, \dots, u_n) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n))$.

Remarque 4 Cas des coordonnées polaires.

Corollaire 2 Si f est de classe C^1 sur un ouvert convexe U , f est constante sur U si, et seulement si, sa différentielle est identiquement nulle.

Définition 4 Soit f une application de classe C^1 sur un ouvert U . Un point a est dit *régulier* lorsque le gradient de f en a n'est pas nul. Dans le cas contraire, le point a est dit *critique*.

Proposition 2 Si une application à valeurs réelles de classe C^1 sur un ouvert présente un extremum local en un point, c'est un point critique.

Définition 5 Si f est de classe C^1 sur un ouvert U , on définit les dérivées partielles d'ordre 2, quand elles existent, par $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(a)$.

Lorsqu'elles existent toutes et sont toutes continues sur U , on dit que f est de classe C^2 .

Théorème 2 (Hermann Amandus SCHWARZ) Si f est de classe C^2 alors : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Théorème 3 Si f est de classe C^2 alors $f(a + h) = f(a) + (\nabla f(a))^T h + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + o(\|h\|^2)$ où $H_f(a)$ est la *Hessienne* de f en a , matrice (symétrique) définie par : $[H_f(a)]_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$.

Proposition 3 Si f est de classe C^2 sur U et a un point critique, alors :

- si f présente un minimum local en a , $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$
- si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbf{R})$, f présente un minimum local strict en a

Définition 6 Tangente en un point régulier d'une courbe d'équation $f(x, y) = 0$.

Définition 7 Plan tangent en un point régulier d'une surface d'équation $f(x, y, z) = 0$.

Remarque 5 La tangente en un point régulier d'une courbe de classe C^1 tracée sur une surface d'équation $F(x, y, z) = 0$ appartient au plan tangent à la surface en ce point.