

Exercice 1 (*Mines-Ponts 19*) Soit A une partie ouverte d'un espace vectoriel normé E . Montrer que $\bigcup_{a \in A} \overline{B}(a, 1)$ est une partie ouverte de E . ($\overline{B}(a, 1)$ désignant la boule fermée)

Exercice 2 (*Mines-Ponts 22*) Soit E un espace vectoriel normé.

- a) Montrer que l'adhérence d'un sous-espace est un sous-espace.
- b) Qu'en déduit-on pour les hyperplans?

Exercice 3 (*Mines-Ponts 24*) Soit $\varphi \in E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$. Pour $f \in E$ on pose $N_\varphi(f) = \|f\varphi\|_\infty$.

- a) Montrer que N_φ est une norme sur E si et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\})$ est d'intérieur vide.
- b) Montrer que N_φ et N_∞ sont équivalentes si et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.

Exercice 4 (*Mines-Ponts 25 et Centrale 21*)

- a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $P \in \mathbf{R}[X]$, normalisé de degré n .
Montrer que P est scindé sur $\mathbf{R}$ ssi : $\exists c > 0, \forall z \in \mathbf{C}, |P(z)| \geq c |\operatorname{Im}(z)|^n$.
- b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}$ des matrices trigonalisables est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
- c) Montrer que $\mathcal{A}$ est l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 5 (*Centrale 2011*)

- a) Peut-on trouver une norme sur $\mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbf{R})$ telle que $f \mapsto f'$ soit continue?
- b) Peut-on trouver une norme sur $\mathbf{R}[X]$ telle que $f \mapsto f'$ soit continue?

Exercice 6 (*Mines-Ponts 17*) Dans $\mathbf{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, soit K une partie convexe, fermée, bornée, ne contenant pas le vecteur nul.

- a) Montrer qu'il existe $u \in K$ tel que $\|u\| = \inf_{x \in K} \|x\|$.
- b) Montrer que $\langle u, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in K$.

Exercice 7 (*Mines-Ponts 25*) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ une application continue. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que : $\forall t \in [0, 1], B(\gamma(t), \delta) \subset U$.

Exercice 8 (*Mines-Ponts 19*) Soit $f(x, y) = \frac{\sin x - \sin y}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y}$.

- a) Déterminer l'ensemble de définition A de f et montrer que c'est un ouvert de $\mathbf{R}^2$.
- b) Montrer que f est continue sur A et prolongeable par continuité à $\mathbf{R}^2$.