

**Exercice 1** (Centrale 22)

- 1) En utilisant la commande `random`, écrire une fonction Python qui prend en argument un entier naturel  $n$  et renvoie une matrice de  $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  à coefficients dans  $[0, 1[$ . Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de quelques-unes de ces matrices. Que peut-on conjecturer sur la valeur propre maximale? Sur un vecteur propre associé à cette valeur propre?
- 2) On munit  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  de sa structure euclidienne canonique et pour  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  on pose :  $\Phi(X) = X^\top A X$ . Soit  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R}^+)$  et  $\alpha$  la plus grande valeur propre de  $M$ .
  - a) Justifier l'existence de  $\alpha$  puis montrer que :  $\forall X \in \mathbf{R}^n, \Phi(X) \leq \alpha \|X\|^2$ , avec égalité si et seulement si  $X$  est propre pour  $\alpha$ .
  - b) Soit  $C = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) ; \|X\| = 1 \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i \geq 0\}$ . Montrer que  $\Phi$  admet sur  $C$  un maximum  $\mu \leq \alpha$ .
  - c) Soient  $X$  un vecteur unitaire tel que  $MX = \alpha X$  et  $W$  le vecteur dont les composantes sont les valeurs absolues de celles de  $X$ . Montrer que :  $W \in C$  et  $\mu \geq |\alpha|$ .
  - d) En déduire que  $\alpha \geq 0$  et que  $M$  admet un vecteur propre à coefficients positifs associé à  $\alpha$ .
  - e) Montrer que, pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $M$ ,  $|\lambda| \leq \alpha$ .

**Exercice 2** (Mines-Ponts 25)

- 1) Rappeler la définition de  $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$  et  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ .
- 2) a) Soit  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ . Montrer qu'il existe  $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$  telle que  $C^2 = A$ .  
 b) Montrer que, pour toute matrice  $B \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ ,  $BAB \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ .
- 3) Montrer que l'on définit une relation d'ordre sur  $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  en posant  $A \leq B$  ssi  $(B - A) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ .
- 4) a) Montrer que si  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$  alors  $A$  est inversible et  $A^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ .  
 b) Montrer que  $f: \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R}), M \mapsto M^{-1}$  est décroissante.  
*Indication* : Commencer par montrer que si  $I_n \leq B$  alors  $f(B) \leq f(I_n)$ .

**Exercice 3** (CCINP 25) Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  vérifiant  $(*) : M^\top M = M M^\top$  et  $M^2 + 2I_n = 0$ .

- 1) Justifier la diagonalisabilité de  $M^\top M$ .
- 2) Trouver un polynôme annulateur, puis les valeurs propres, de  $M^\top M$ .
- 3) Montrer que  $\frac{1}{\sqrt{2}}M$  est orthogonale puis donner, pour  $n = 2$ , toutes les matrices  $M$  vérifiant  $(*)$ .

**Exercice 4** (CCINP 23)

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$  et  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  dans l'espace euclidien  $\mathbf{R}^3$ .

- 1) Montrer que  $f$  est une rotation ssi  $a, b$  et  $c$  vérifient 3 équations à déterminer.
- 2) Montrer que  $f$  est une rotation ssi  $a, b$  et  $c$  sont racines de  $X^3 - X^2 + p = 0$ , avec  $p \in [0, 4/27]$ .
- 3) Si  $b = c \neq 0$  déterminer l'axe de direction de la rotation et la valeur de l'angle.