

Exercice 1 (Mines-Télécom 24 et CCINP 23) Soit A une matrice symétrique réelle.

- 1) Justifier l'existence d'un vecteur propre pour A .
- 2) Soit X un tel vecteur, on pose $B = \begin{pmatrix} A & XX^\top \\ XX^\top & A \end{pmatrix}$ et $Y_a = \begin{pmatrix} X \\ aX \end{pmatrix}$.
Pour quelle valeurs de a le vecteur Y_a est-il propre pour B ?
- 3) B est-elle diagonalisable? Si oui, donner une base de vecteurs propres.
- 4) Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ trouver un polynôme annulateur de B de degré 3.

Exercice 2 (Centrale 24)

- a) Que peut-on dire du spectre d'une matrice orthogonale?
- b) Que peut-on dire de l'endomorphisme représenté dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ par $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$?

Exercice 3 (Centrale 24) Soit p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E .

- a) Montrer que $u = p - q$ est diagonalisable et que le spectre de u est inclus dans $[-1, 1]$.
- b) Déterminer $\text{Ker}(u + \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(u - \text{id}_E)$.

Exercice 4 (Centrale 24)

Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant : $M^\top M M^\top = I_n$.

Exercice 5 (Centrale 24)

Déterminer les matrices $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ qui sont semblables à leur diagonale.

Exercice 6 (Mines-Ponts 25) Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

- a) Montrer que : $\forall A \in \text{GL}_n(\mathbf{R}), \text{tr}(A^\top A) > 0$.
- b) Montrer que : $\forall S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R}), \exists A \in \text{GL}_n(\mathbf{R}), S = A^\top A$.
- c) Montrer que : $\forall (S, S') \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R}), \text{tr}(SS') > 0$.