

Exercice 1 (Navale 25) Soit f définie sur $\mathbf{R}^2 \setminus (0,0)$ par : $f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$.

- Montrer que f peut être prolongée par continuité en $(0,0)$.
- Montrer que ce prolongement est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$. Est-il de classe C^2 ?

Exercice 2 (CCINP 25) Soit f définie sur $\mathbf{R}^2$ par $f(x, y) = x e^y + y e^x$.

- Qu'est-ce qu'un point critique? Quel est le rapport entre point critique et extremum?
- Montrer que si (x, y) est un point critique de f alors $y + \exp\left(y - \frac{1}{y}\right) = 0$.
- Prouver que f admet un unique point critique $(x_0, y_0) \in \mathbf{Z}^2$; mais pas d'extremum.

Exercice 3 (Mines-Télécom 25) Soit $T = \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2, x + y \leq 1\}$ et $f(x, y) = xy\sqrt{1 - x - y}$. Montrer que f admet un maximum et un minimum sur T , puis déterminer ces extremums.

Exercice 4 (Mines-Télécom 25) Soit S la surface d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6y - 2z = 1$. Trouver les plans tangents à S qui sont parallèles au plan d'équation $x + y + z = 0$.

Exercice 5 (Mines-Ponts 24)

- Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. À l'aide d'un changement de variable classique, résoudre l'équation aux dérivées partielles $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$ où f est de classe C^1 de $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$.
- Résoudre l'équation aux dérivées partielles $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} f(x, y)$.

Exercice 6 (Mines-Ponts 24) Sur $\mathbf{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, soit $\rho(x) = \|x\|^2$.

- Vérifier que f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^n$.
- Soit g de classe C^2 de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ et $f: \mathbf{R}^n \setminus \{(0,0)\}, (x, y) \mapsto g(\|x\|^2)$. Déterminer g pour que $\Delta(f) = 0$.

Exercice 7 (Mines-Ponts 25) Pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on pose $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{(1+x^2)(1+y^2)(x^2+y^2)}$.

- Montrer que f est prolongeable par continuité en $(0,0)$.
- La fonction f ainsi prolongée est-elle de classe C^2 ?
- Montrer que f admet un maximum global, que l'on précisera.

Exercice 8 (Centrale 21 et 22) Soit $f(x, y) = (2x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

- Avec Python, tracer la surface représentative de f sur $[-2, 2] \times [-2, 2]$.
- Montrer que f admet un minimum, que l'on précisera, sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.
- Soit $a > 0$. Montrer qu'il existe $R_a > 0$ tel que : $x^2 + y^2 > R_a \implies f(x, y) \leq a$.
- Montrer que f admet un maximum M sur $\mathbf{R}^2$ et calculer M .
- Pour $c \in [0, M]$, soit $\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, f(x, y) = c\}$. Tracer Γ_c pour $c \in \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.75, 0.8, 0.9\}$.
- Déterminer les valeurs de c pour lesquelles Γ_c admet une tangente horizontale en un point qui n'est pas sur l'axe des ordonnées.

Exercice 9 (Centrale 25) Soit $f: \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*, (x, y) \mapsto \frac{1}{x} + x y + \frac{1}{y}$ et $S = \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*\}$.

- Déterminer l'équation du plan tangent à S en un point $(a, b, c) \in S$.
- Montrer que f est minorée, puis qu'elle admet un minimum, que l'on déterminera.

Exercice 10 (Centrale 25) Soit $K: [0, 1] \times [0, 1] (x, y) \mapsto \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x \leq y \\ y(1-x) & \text{si } x > y \end{cases}$

- Montrer que K est continue et bornée sur $[0, 1] \times [0, 1]$.
- Pour $z \in \mathbf{R}$, trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation $f(x, y) = z$.