

**Exercice 1** (Centrale 2025 et Mines-Ponts 2019)

Soit  $f$  définie sur  $\mathbf{R}^2$  par :  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^x$  pour  $(x, y) \neq (0, 0)$  ; et  $f(0, 0) = 1$ .

- a) Étudier la continuité de  $f$  sur  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .
- b) La fonction  $f$  admet-elle des dérivées partielles en  $(0, 0)$  ?
- c) Étudier les variations de  $g : x \mapsto f(x, 0)$ .
- d) La fonction  $f$  admet-elle un extremum en  $(0, 0)$  ?
- e) Déterminer tous les extrema de  $f$  sur  $\mathbf{R}^2$ .

**Exercice 2** (Centrale 2022) Soit  $\varphi : (x, y) \mapsto (xy, x + y)$  et  $V = \{(x, y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2, y > x > 0\}$ .

- a) Montrer que  $V$  est un ouvert et que  $\varphi(V) = \{(p, s) \in \mathbf{R}_+^*, s^2 > 4p\}$ . Justifier la classe  $C^1$  de  $\varphi$ .  
On admet que  $\varphi$  réalise une bijection de  $V$  sur  $\varphi(V)$  et que sa réciproque est de classe  $C^1$ .
- b) Soit  $f$  de classe  $C^1$  vérifiant sur  $V$  l'équation (E) :  $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 - y^2$ .  
Montrer que  $g = f \circ \varphi^{-1}$  vérifie sur  $\varphi(V)$  l'équation  $\frac{\partial g}{\partial s}(p, s) = s$ .
- c) En déduire qu'une fonction  $f$  de classe  $C^1$  est solution de (E) sur  $V$  si, et seulement si, il existe une fonction  $K : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $C^1$  telle que  $f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)^2 + K(xy)$ .

**Exercice 3** (Mines-Télécom 2023 et Mines-Ponts 2010)

On pose  $g(0, 0) = 0$  et  $g(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$  pour  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

- a) Montrer que  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbf{R}^2$ .
- b) Justifier l'existence d'extremums pour  $g$  sur  $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ .
- c) Déterminer les extremums, locaux ou globaux, de  $g$  sur  $D$ .