Exercice 1 *(Mines-Ponts 2025 et Centrale 2021, entre autres...)*
On pose $f(0,0)=0$ et $f(x,y)=\frac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y)}$ pour $(x,y)\in\mathbf{R}_+^2$.
Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}_+^2$ et y possède un maximum, que l'on déterminera.

Exercice 2 *(Centrale 2022)*
Soit $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R},(x,y,z)\mapsto\sin(x)\sin(y)\sin(z)$ et g sa restriction à $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}_+^3\ :\ x+y+z=\frac{\pi}{2}\right\}$.

a) Justifier l'existence d'un maximum de g sur D.

b) En paramétrant D par (x,y), déterminer les points de D en lesquels g atteint ce maximum M.

c) Soit (a,b,c) un tel point et $V=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3,\ f(x,y,z)=M\}$.
Montrer que D est inclus dans le plan tangent à V en (a,b,c).

Exercice 3 *(Mines-Ponts 2022)*
Résoudre $x(x-1)\dfrac{\partial f}{\partial x}+y(x-1)\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2f(x,y)$ en posant $x=u$ et $y=uv$.

Exercice 4 *(CCINP 2021, écrit)*
Détermination (laborieuse sans hessienne) des extremums sur $\mathbf{R}^2$ de x^3+y^3-3xy.