

1 Conseils généraux

1.1 L'examineur (ou l'examinatrice)

Contrairement à ce qui peut se passer en colle, son but n'est pas de vous aider dans l'apprentissage du cours ou de vous dire ce qui va ou ce qui ne va pas. Son but est de vous **évaluer**. Il ou elle sera donc souvent très neutre. Ne cherchez pas à lire sur le visage de la personne qui vous interroge si ce que vous dites est juste ou faux. . .

Extrait du rapport Mines-Ponts 2025 :

En premier lieu, il est essentiel que les candidats prennent conscience qu'une épreuve orale de concours n'est pas une colle ni un cours particulier, et que son principal acteur doit être le candidat[...]

Un oral est par nature une discussion avec l'examineur. Il est nécessaire que le candidat ne reste pas tout le temps face à son tableau. Il doit parler de manière claire et intelligible. Par ailleurs, il faut aussi qu'il soit à l'écoute et qu'il sache réagir positivement lorsqu'on lui donne une indication, la meilleure solution étant de commencer par la noter à l'écrit au tableau. Par contre, cela ne signifie pas qu'il faille attendre de la part de l'examineur une approbation permanente ou la solution à tous les problèmes.

1.2 Gestion du temps de préparation

- tâchez de saisir rapidement la finalité de l'exercice, d'identifier les concepts et les résultats qui devront être mis en jeu
- commencez linéairement l'exercice, même si des concours comme CCINP autorisent le fait de sauter des questions intermédiaires
- vous n'êtes pas obligé-e-s de préparer intégralement toutes les questions, si vous pensez que vous arriverez à les faire en direct à l'oral
- en revanche, si vous avez peur de ne pas réussir certains calculs en direct, il est recommandé de les faire *soigneusement* au brouillon

1.3 Gestion de l'oral

- ce n'est pas un écrit debout, il ne s'agit pas de rédiger une copie au tableau!
Il convient cependant de tenir un tableau organisé et lisible et de cantonner les abréviations à un usage raisonnable. Et puis il est recommandé de demander l'autorisation avant d'effacer. (Mines-Ponts 2025)
- vous n'êtes pas obligés de faire une présentation intégrale de l'exercice que vous allez traiter :
En début d'épreuve, la lecture, la copie quasi intégrale au tableau de l'énoncé, la présentation générale à l'oral du sujet constituent autant de pertes de temps; le jury interroge toujours en ayant l'énoncé de l'exercice et le candidat est invité à entrer d'emblée dans le vif du sujet. (Centrale 2025)
- en revanche, il sera apprécié que vous présentiez synthétiquement le fruit de votre préparation :
Une présentation claire des étapes envisagées avant d'entrer dans les détails constitue en général un atout pour la qualité de l'exposé. (CCINP 2025)
- enfin, il faut savoir gérer son temps :
Il est essentiel de rester réactif et de tirer parti des indications fournies. L'essentiel du temps doit être consacré au contenu mathématique, quitte à survoler des points élémentaires pour se concentrer sur ce qui est plus délicat. (CCINP 2025)

2 Centrale 1

2.1 (Tommaso Bogoni)

Soit $T = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

- 1) Donner l'expression de T^n pour $n \in \mathbf{N}$.
- 2) Montrer que $E_n(T) = \sum_{k=0}^n \frac{T^k}{k!}$ tend vers une limite $E(t)$ quand n tend vers l'infini.
- 3) Calculer $E(T)$. Cette matrice peut-elle avoir le même spectre que T ?

2.2 (Victoire Denise)

Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie, tels que $f^2 = g^2 = \text{Id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$. On note $F^+ = \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $F^- = \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$.

- 1) Montrer que $g(F^+) = F^-$ et $g(F^-) = F^+$.
- 2) En déduire que la dimension de E est paire.
- 3) Montrer que f et g peuvent être représentées dans une même base par $\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & -I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$.

2.3 (Maxime Flotron)

Pour $n \geq 2$ soit V_n l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont le spectre complexe est réduit à $\{1\}$.

- 1) Déterminer une matrice $M \in V_n$ qui ne soit pas la matrice unité.
- 2) Montrer que, pour toute matrice $M \in V_n$, $(M - I_n)^n = 0_n$.
- 3) Déterminer une matrice $M \in V_4$ telle que $(M - I_4)^2 \neq 0_4$ et $(M - I_4)^3 = 0_4$.
- 4) Déterminer les matrices symétriques appartenant à V_n .
- 5) Déterminer les matrices orthogonales appartenant à V_3 .
- 6) Montrer que si $A \in O_n(\mathbf{R})$ admet un vecteur propre pour 1, l'orthogonal de ce vecteur est stable pour l'endomorphisme canoniquement associé. En déduire $O_n \cap V_n$.

2.4 (César Gauzin)

Pour $(x, y) \in [-1, 1]^2$ on pose $f(x, y) = \int_{-1}^1 |t - x| |t - y| dt$.

- 1) Montrer que f est continue sur $[-1, 1]^2$.
- 2) En déduire l'existence de $\mu = \min \{f(x, y), (x, y) \in [-1, 1]^2\}$.
- 3) Pour $-1 \leq x \leq y \leq 1$, montrer que $f(x, y) = \frac{2}{3} + 2xy + \frac{(y-x)^3}{3}$.
- 4) En déduire la valeur de μ .

2.5 (Paul Gotteland)

- 1) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $\text{Ker}(M)$, $\text{Im}(M)$, $\text{Ker}(M^2)$, $\text{Im}(M^2)$.
 $\text{Ker}(M)$ et $\text{Im}(M)$ sont-ils supplémentaires? $\text{Ker}(M^2)$ et $\text{Im}(M^2)$ sont-ils supplémentaires?
- 2) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.
 On note $N(u) = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} \text{Ker}(u^k)$ et $C(u) = \bigcap_{k \in \mathbf{N}} \text{Im}(u^k)$.

- a) Montrer que $N(u)$ et $C(u)$ sont deux sous-espaces supplémentaires stables par u .
- b) Montrer que l'endomorphisme induit par u sur $C(u)$ est un automorphisme.
- c) Montrer que l'endomorphisme induit par u sur $N(u)$ est nilpotent.
- d) Montrer qu'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $N(u) = \text{Ker}(u^p)$ et $C(u) = \text{Im}(u^p)$.
- e) Montrer que si F et G sont deux sous-espaces de E vérifiant
 - i) $E = F \oplus G$
 - ii) F est stable par u ; et u induit sur F un automorphisme
 - iii) G est stable par u ; et u induit sur G un endomorphisme nilpotent
 alors $F = C(u)$ et $G = N(u)$.

2.6 (Loïc Jeanjean)

- 1) Soit (u_n) une suite de réels convergeant vers 0.
Montrer que la convergence de la suite $(\sum_{k=0}^{2n} u_k)$ entraîne celle de la série de terme général u_n .
- 2) Soit $h_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sqrt{k}$.
Montrer que $h_{2n} \sim \frac{\sqrt{2n}}{2}$ quand n tend vers l'infini. En déduire un équivalent de h_n .
- 3) Il y avait une dernière question...

2.7 (Haythem Medhmed)

Soit $\theta > 0$. Des individus numérotés $1, 2, \dots$ arrivent successivement dans un restaurant qui abrite une infinité de tables infiniment longues. Le premier individu s'installe à une table puis, lorsque le numéro $k+1$ se présente, il choisit une nouvelle table avec la probabilité $\frac{\theta}{k+\theta}$ ou bien choisit au hasard, avec la probabilité $\frac{1}{k+\theta}$, l'un des k individus déjà attablés et s'assied à la même table. On note K_n la variable aléatoire indiquant le nombre de tables occupées lorsque n individus ont pris place.

- 1) Déterminer $P(K_n = 1)$.
- 2) Soit G_n la fonction génératrice de K_n . Montrer que $G_n(x) = \frac{L_n(\theta x)}{L_n(\theta)}$ où $L_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1} (x+i)$.
- 3) Calculer $E(K_n)$ et $V(K_n)$ puis en donner des équivalents quand n tend vers l'infini.
- 4) Étudier le comportement de $\left(\frac{K_n}{\ln n}\right)$ quand n tend vers l'infini.

2.8 (Solène Pelong)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1, 1\}$, de lois unimodales; et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

- 1) Pour $t \in \mathbf{R}$, justifier que $\exp(tX_n)$ admet une espérance et la calculer.
Montrer que $E(\exp(tX_n)) \leq e^{t^2/2}$ pour tout $(n, t) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{R}$.
- 2) Justifier que $\exp(tS_n)$ admet une espérance et la calculer.
Déterminer la limite de $E\left(\exp\left(\frac{tS_n}{\sqrt{n}}\right)\right)$ quand n tend vers $+\infty$.
- 3) Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \forall t > 0, P\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq e^{\left(\frac{nt^2}{2} - n\varepsilon t\right)}$. En déduire que $P\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$.

2.9 (Antonin Perenne)

- 1) Montrer que pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- 2) Soit f une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbf{C})$ vérifiant $f(AB) = f(A)f(B)$ pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ on pose $\Phi(M) = \text{tr}(f(M))$.
 - a) Montrer que $\Phi(AB) = \Phi(BA)$ pour tout couple (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
 - b) En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbf{C}$ tel que $\text{tr}(f(M)) = \alpha \text{tr}(M)$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

2.10 (Kevin Salib)

- 1) Exposer, en le justifiant, l'algorithme de Gram-Schmidt.
- 2) Soit $A \in GL_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe une matrice U orthogonale et une matrice T triangulaire, à coefficients diagonaux strictement positifs, telles que $A = UT$.
- 3) Établir l'unicité d'un tel couple de matrices (U, T) .

2.11 (Lucas Syhanath)

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ il existe une unique fonction f_n de classe \mathcal{C}^2 de \mathbf{R}_+^* dans \mathbf{R} vérifiant : $f_n(1) = f_n(2) = 0$ et $f_n''(x) = (-1)^n 2^{-nx^2}$.
- 2) Établir la convergence uniforme des séries de fonction $\sum f_n''$, $\sum f_n'$ et $\sum f_n$ sur tout segment de \mathbf{R}_+^* .
- 3) Soit $S(x) = \sum_{n \geq 0} f_n(x)$. Montrer que f est de classe C^2 sur \mathbf{R} et que $\|f\|_\infty \leq 1/3$.

2.12 (Jeanne D'Albret)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $E = \mathbf{R}_n[X]$.

- 1) Donner la formule de Taylor pour $P \in E$ et $a \in \mathbf{R}$. La démontrer pour $a = 0$.
- 2) Pour $P \in E$, démontrer l'existence et l'unicité de $Q \in E$ tel que : $\forall x \in \mathbf{R}, (x-1)Q(x) = \int_1^x P(t) dt$.
- 3) Soit f l'application qui à $P \in E$ associe le polynôme Q défini dans la question précédente. Montrer que f est un endomorphisme diagonalisable.
- 4) Il y avait une dernière question...

2.13 (BEOS 8684)

Pour $z \in \mathbf{C}$ on pose $s(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$ et $\varphi(z) = |z|^2$.

- 1) φ est-elle bornée sur \mathbf{C} ?
- 2) Montrer que φ est bornée sur $D = \{z \in \mathbf{C}; |z| \leq 1\}$.
- 3) Montrer que φ atteint son maximum sur D en exactement deux points.

2.14 (BEOS 8923)

Soit E un espace euclidien et $f \in GL(E)$ vérifiant : $\forall (x, y) \in E \times E, \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$.

- 1) Montrer que $s = f \circ f$ est un endomorphisme auto-adjoint.
- 2) Montrer que les valeurs propres de s sont strictement négatives. En déduire que la dimension de E est paire.

- 3) Soit x un vecteur propre pour s .
Montrer que $F = \text{Vect}(x, f(x))$ est un plan stable par f , puis que F^\perp est également stable par f .
- 4) En déduire qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, avec des blocs de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$.

2.15 (RMS 1262)

On identifie $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ et \mathbf{R}^2 . On munit \mathbf{R}^2 de sa structure euclidienne canonique.

On pose $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) : \forall X \in \mathbf{R}^2, \|AX\| \geq \|X\|\}$. On dit que $A \in \mathcal{C}$ est un point extrémal de \mathcal{C} lorsque : $\forall (B_1, B_2) \in \mathcal{C}^2, A = \frac{1}{2}(B_1 + B_2) \implies A = B_1 = B_2$.

- 1) Montrer que $O_2(\mathbf{R}) \subset \mathcal{C}$.
- 2) a) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe $R \in SO_2(\mathbf{R})$ telle que $AR \in S_2(\mathbf{R})$.
b) En déduire qu'il existe Ω_1 et $\Omega_2 \in O_2(\mathbf{R})$ telles que : $\Omega_1 A \Omega_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.
c) On suppose que $A \in \mathcal{C}$. Montrer qu'alors a et b appartiennent à $[-1, 1]$.
- 3) Montrer que l'ensemble des points extrémaux de \mathcal{C} est $O_2(\mathbf{R})$.

3 CCINP

3.1 (Anton Beltran)

3.1.1

Une entreprise reçoit par téléphone des commandes pour deux produits, A et B , chaque appel étant indépendant des précédents. La probabilité qu'un appel soit pour le produit A est $0,2$ tandis qu'elle est de $0,8$ pour le produit B . On définit les variables aléatoires suivantes :

X_A = nombre d'appels consécutifs nécessaires pour obtenir une première commande du produit A ;

X_B = nombre d'appels consécutifs nécessaires pour obtenir une première commande du produit B ;

L = longueur de la première séquence d'appels consécutifs commandant un même produit.

Par exemple, si la suite d'appels est AAABAABB, alors $X_A = 1$, $X_B = 4$ et $L = 3$.

- 1) a) Déterminer la loi de X_A , puis son espérance et sa variance.
b) Mêmes questions pour X_B .
- 2) a) Déterminer $P(X_A = n + 1, L = n)$.
b) Montrer que $P(L = n) = 0,8 P(X_A = n) + 0,2 P(X_B = n)$.
- 3) Justifier que L admet une espérance et la calculer.
- 4) a) Les variables X_A et X_B sont-elles indépendantes?
b) Les variables X_A et L sont-elles indépendantes?

3.1.2

$$\text{Soit } I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{(t-1)} dt.$$

- a) Justifier la convergence de I .
- b) Montrer que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

3.2 (Tommaso Bogoni)

3.2.1

- 1) Justifier la convergence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^3}{t^2} dt$.
- 2) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, \sin(t)^3 = \frac{3}{4} \sin(t) - \frac{1}{4} \sin(3t)$.
- 3) Montrer que $I = \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.
- 4) Montrer que $g(t) = \frac{\sin(t) - t}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0.
- 5) En déduire la valeur de I .

3.2.2

Soit $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$.

- a) Déterminer les éléments propres de $M(a, b, c)$.
- b) $M(a, b, c)$ est-elle diagonalisable?
- c) Calculer le déterminant de $M(a, b, c)$.
- d) Lorsque ce déterminant est nul, préciser l'image et le noyau de $M(a, b, c)$.

3.3 (Étienne Bouilleau)

3.3.1

Soit $a > 0$.

- 1) Justifier l'existence de $\int_0^1 \frac{1}{1+t^a} dt$.
- 2) Justifier l'existence de $\int_0^1 t^{na} dt$ et calculer sa valeur.
- 3) On souhaite montrer que : $\int_0^1 \frac{1}{1+t^a} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}$.
 - a) Est-il possible de le montrer grâce à la convergence uniforme d'une série de fonctions?
 - b) Est-il possible de le montrer grâce à la convergence de la série des intégrales?
 - c) Est-il possible de le montrer grâce par majoration du reste d'une série de fonctions?
 - d) Quelles formules obtient-on pour $a = 1$ et $a = 2$?

3.3.2

- a) Énoncer le théorème du rang.
- b) Sous quelles hypothèses l'énoncé suivant est-il vrai?
Soit u une application linéaire d'un espace E dans un espace F , alors u injective $\iff u$ surjective
Donner des contre-exemples pour illustrer l'importance de ces hypothèses.

3.4 (Célia Bruyère)

3.4.1

- 1) Donner deux CNS pour qu'une matrice soit diagonalisable.
- 2) Dans la suite, A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant : $A^2 - 5A + 6I_n = 0$.
Montrer que A est semblable à une matrice diagonale D .
- 3) Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ on pose $f(M) = DM - MD$.
Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Indication : on pourra écrire M et D sous forme de matrices par blocs.

3.4.2

Étudier la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n \sin(\ln(n))}{n}$.

Indication : étudier $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$.

3.5 (Thomas Candeias Da Silva)

3.5.1

- 1) Donner le développement en série entière de $\frac{1}{(1-x)^n}$ pour $n = 1$ puis pour $n \geq 2$.
- 2) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $p \in]0, 1[$, $q = 1 - p$ et, pour $k \in \mathbf{N}$, $p_k = \binom{n+k-1}{k} p^n q^k$.
Montrer que l'on définit ainsi une probabilité sur \mathbf{N} .
- 3) Soit X une variable aléatoire vérifiant : $\forall k \in \mathbf{N}$, $P(X = k) = p_k$.
Déterminer la fonction génératrice de X , puis calculer l'espérance et la variance de X .

3.5.2

Résoudre l'équation différentielle : $y'(x) - 2xy(x) = (-2x - 1)e^x$.

3.6 (Albane De Gélis)

3.6.1

Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x > 0$ on pose $f_n(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$.

- 1) Donner le domaine de définition de $S(x) = \sum_{n \geq 1} f_n(x)$.
- 2) Déterminer le domaine de continuité de S , puis les variations de S .
- 3) Démontrer qu'il existe $A > 0$ tel que : $\forall n \geq 2$, $\forall x \geq A$, $f_n(x) \leq 3e^{-nx}$.
- 4) En déduire que $S(x) \sim \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}$ quand x tend vers $+\infty$.

3.6.2

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E .

On suppose que u est annulé par un polynôme dont 0 est racine simple.

- a) Que peut-on dire des coefficients de P ?
- b) Montrer que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u^2)$.
- c) Montrer que si u est nilpotent alors u est nul.

3.7 (Victoire Denise)**3.7.1**

On veut calculer $A = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$. On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

- 1) Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
- 2) Calculer $f(0)$ et déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$.
- 3) Montrer que f est C^1 sur $]0, +\infty[$ puis établir que $f'(x) = -A \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$.
- 4) Montrer que $\int_0^{+\infty} f'(t) dt = -2A^2$. En déduire la valeur de A .

3.7.2

Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ vérifiant $M^3 = 4M$ et $\text{tr}(M) = 0$.

- a) Énoncer et démontrer le résultat liant polynôme annulateur et valeurs propres.
- b) Caractériser les matrices M vérifiant les deux conditions de l'énoncé.

3.8 (Gabriel Duclos)**3.8.1**

Soit X suivant une loi de Poisson de paramètre λ .

- 1) Montrer que $P(X \leq n) = \frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.
- 2) En déduire un équivalent de $\int_{\lambda}^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ quand n tend vers $+\infty$.
- 3) Calculer $G_X(1)$ et $G_X(-1)$. En déduire la probabilité que X soit paire.
- 4) Il y avait une dernière question...

3.8.2

- a) Donner la définition du produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
- b) Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a-c & b \\ c & b+c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \right\}$. Déterminer une base de F .
- c) En déduire la dimension de F^\perp .
- d) Déterminer la distance d'une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ à F .

3.9 (Stella Dunoyer de Segonzac)**3.9.1**

Soit $n \geq 3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) Déterminer le rang de A . En déduire la dimension de $\text{Ker}(A)$. A est-elle diagonalisable?
- 2) Montrer que pour toute matrice colonne X de taille n on a : $X^\top A X \leq \max(\text{Sp}(A)) X^\top X$.
- 3) Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si X est propre pour $\max(\text{Sp}(A))$.
- 4) Montrer que $\text{Sp}(A) = \{0, \lambda, 1 - \lambda\}$ où λ désigne la plus grande valeur propre de A .

3.9.2

On lance indéfiniment un dé classique, équilibré. On note X_i la valeur du i -ème lancer.

- Déterminer la probabilité que $X_1 \neq X_2$.
- Quelle est la probabilité que pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, $X_i = X_1$?
- On note alors N la variable aléatoire égale à l'indice i du premier lancer tel que $X_i \neq X_1$. Déterminer la loi de N .

3.10 (Gavivarsan Ganeshanathan)**3.10.1**

Soit $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} (\sin t)^2}{t} dt$.

- Montrer que l'intégrale définissant $g(x)$ converge pour tout $x > 0$.
- Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
- Montrer que g est de classe C^1 sur \mathbf{R}_+^* et calculer $g'(x)$.
- En déduire l'expression de $g(x)$.

3.10.2

Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ vérifiant $M^3 = 4M$ et $\text{tr}(M) = 0$.

- Énoncer et démontrer le résultat liant polynôme annulateur et valeurs propres.
- Caractériser les matrices M vérifiant les deux conditions de l'énoncé.

3.11 (César Gauzin)**3.11.1**

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n .

On suppose que $u^3 = u^2$ avec $u \neq \text{Id}_E$, $u^2 \neq u$ et $u^2 \neq 0$.

- Montrer que $\text{Sp}(u) \subset \{0, 1\}$.
- Montrer qu'il existe un vecteur $x \neq 0_E$ tel que $u(x) = 0_E$. Que peut-on en déduire ?
- Montrer de même que 1 est une valeur propre de u .
- Montrer que $E = \text{Ker}(u^2) \oplus \text{Im}(u^2)$ et que $\text{Im}(u^2) = \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$.
- Soit $p = \dim(\text{Ker}(u - \text{Id}_E))$, $r = \dim(\text{Ker}(u))$ et $q = n - p - r$.

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle u est représentée par
$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0_r & A \\ 0 & 0 & 0_q \end{pmatrix}.$$

3.11.2

- Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que le cas d'égalité.

b) Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \forall t \in \mathbf{R}, \frac{|x + ty|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{1 + t^2}$.

c) Montrer que : $\sup_{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{|x + ty|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{1 + t^2}$.

3.12 (Paul Gotteland, Hugo Isaert)**3.12.1**

- 1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Que peut-on dire de $\det(A)$ s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $B^2 = A$?
- 2) Soit $a \in \mathbf{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 2+a & 2 & 1+a \\ 3-a & 3 & 3-a \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.
Calculer $\det(A)$. En déduire une condition pour qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $B^2 = A$.
- 3) Désormais $a \geq 0$. Déterminer les éléments propres de A puis donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = P D P^{-1}$.
- 4) Désormais $a \neq 1$ et $a \neq 3$. Montrer que si M est telle que $M^2 = D$ alors $MD = DM$.
Déterminer les matrices M telles que $M^2 = D$. En déduire les matrices B telles que $B^2 = A$.

3.12.2

Trouver une suite à termes strictement positifs qui tend vers 0 mais qui n'est pas décroissante.

3.13 (Loïc Jeanjean)**3.13.1**

Soit $a > 0$ et φ une fonction continue sur $[-a, a]$.

On suppose qu'il existe un réel $c \geq 0$ tel que : $\forall x \in I, |\varphi(x)| \leq c|x|$.

On cherche les fonctions f continues sur I , nulles en 0, telles que : $\forall x \in I, f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x)$.

- 1) Montrer que $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est une solution.
- 2) Montrer qu'il n'y a pas d'autre solution.
- 3) Montrer que si φ est de classe \mathcal{C}^1 alors S itou.

3.13.2

a) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

b) Montrer que : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \implies \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$.

3.14 (Harishan Koneswaran)**3.14.1**

Soit u un endomorphisme d'un \mathbf{C} -espace vectoriel E de dimension finie.

- 1) Montrer que si u est diagonalisable alors u^2 itou.
- 2) Montrer que la réciproque est fautive.
- 3) Soit $\lambda \in \mathbf{C}^*$. Montrer que : $\text{Ker}(u^2 - \lambda^2 \text{Id}_E) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u + \lambda \text{Id}_E)$.
- 4) Montrer que si u^2 est diagonalisable et inversible, alors u est diagonalisable et inversible.
- 5) Montrer que si u est diagonalisable alors $P(u)$ est diagonalisable pour tout polynôme P .
- 6) Soit P un polynôme annulateur de u . On suppose que $P'(u)$ est inversible.
Montrer que les valeurs propres de u sont racines simples de P .
- 7) On suppose qu'il existe un polynôme Q tel que $Q(u)$ soit diagonalisable et $Q'(u)$ inversible.
Montrer que u est diagonalisable.

3.14.2

On considère une urne contenant des boules rouges et des boules vertes, dans laquelle on effectue des tirages avec remise, supposés indépendants, avec une probabilité p d'obtenir une boule verte.

- Soit X_1 le rang d'apparition de la première boule verte.
Déterminer la loi de X_1 puis donner son espérance.
- Soit X_2 le rang d'apparition de la première boule verte.
Déterminer la loi de X_2 puis donner son espérance.

3.15 (Sasha Lemaire)**3.15.1**

On considère deux variables aléatoires X et Y , avec $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

On suppose que la loi de Y sachant $X = n$ est $\mathcal{B}(n, p)$.

- Déterminer la loi conjointe de (X, Y) puis la loi de Y .
- X et Y sont-elles indépendantes?
- Déterminer la loi de $Z = X - Y$.
- Z et Y sont-elles indépendantes?

3.15.2

Soit A une matrice symétrique réelle vérifiant $(E): A^3 + 4A^2 + 5A = 0$.

- A est-elle diagonalisable? Justifier.
- Quel lien y-a-t-il entre les racines d'un polynôme annulateur de A et ses valeurs propres?
- Quelles sont finalement les matrices vérifiant (E) ?

3.16 (Haythem Medhmed)**3.16.1**

Pour $n \in \mathbf{N}$, $a \in [0, 1[$ et $x \in]0, 1]$, soit $f_n(x) = \frac{1-e^{-nx}}{x^a(1+x^2)}$ et $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

- Montrer que f_n converge simplement vers une fonction f .
- Pour quelles valeurs de a la convergence est-elle uniforme?
- Montrer que l'intégrale définissant I_n est convergente pour tout $n \in \mathbf{N}$.
- Montrer que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.
- Que se passe-t-il pour $a = 1$?

3.16.2

Soit E un espace vectoriel de dimension n et (e_1, \dots, e_n) une base de E .

On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f(e_1) = \dots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E .

- Déterminer le rang de f .
- f est-il diagonalisable?

3.17 (Hristina Mirovic)**3.17.1**

Soit φ l'application qui à $P \in \mathbf{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de X^2P par $X^4 - 1$.

- 1) Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$.
- 2) Donner la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$.
- 3) A est-elle diagonalisable? (on pourra calculer A^2)
- 4) Déterminer les éléments propres de φ .
- 5) La matrice A est-elle inversible? Que représente-t-elle géométriquement?
- 6) L'application φ est-il un automorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$?

3.17.2

Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$ si $x \geq 0$, $\frac{nx^3}{1+nx^2}$ si $x < 0$.

- a) Montrer que (f_n) converge uniformément sur \mathbf{R} vers une fonction que l'on précisera.
- b) Montrer que f_n est dérivable sur \mathbf{R} puis étudier la convergence de (f'_n) .

3.18 (Alina Mohammad)**3.18.1**

Soit $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$.

- 1) Montrer que la suite (a_n) est convergente et préciser sa limite.
- 2) Montrer que la série de terme général $(-1)^n a_n$ est convergente.
- 3) Soit R le rayon de convergence de la série de terme général $a_n x^n$ et f sa somme.
 - a) Montrer $a_n \geq \frac{1}{2n+1}$; en déduire la valeur de R .
 - b) Montrer que $(2n+3)a_{n+1} = 1 + (n+1)a_n$.
 - c) Trouver une équation différentielle satisfaite par f .

3.18.2

Soit p et q deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie, vérifiant :
 $p + q = \text{Id}_E$ et $\text{rg}(p) + \text{rg}(q) \leq \dim(E)$.

- a) Montrer que $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$.
- b) Montrer que p et q sont des projecteurs.

3.19 (Mayeul Moreau)**3.19.1**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer que si A est semblable à B alors $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables pour tout polynôme P .
- 2) Calculer M^k puis $P(M)$ en fonction de A , $P(A)$ et $P'(A)$.
- 3) En déduire que si M est diagonalisable alors A l'est aussi.
- 4) Démontrer que si M est diagonalisable, alors A est nulle.

3.19.2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0, \pi[$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

- Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
- Montrer que la série de terme général u_n^3 converge.
- Montrer que la suite de terme général $u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2}$ converge.
- Trouver un équivalent de u_n .

3.20 (Tristan Pallan)**3.20.1**

Soit $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbf{R})$. Pour $f \in E$ on note : $N_0(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$, $N_1(f) = |\int_0^1 f(t) dt| + \int_0^1 |f'(t)| dt$ et $N_2(f) = |\int_0^1 f(t) dt| + |\int_0^1 f'(t) dt| + |\int_0^1 f''(t) dt|$.

- Soit $f : x \mapsto \sin(2\pi x)$. Calculer $N_0(f)$, $N_1(f)$ et $N_2(f)$.
- N_0 est une norme usuelle. Montrer que N_1 est une norme. Est-ce que N_2 est une norme?
- Montrer que : $\forall f \in E, \exists c \in [0, 1], f(c) = \int_0^1 f(t) dt$. En déduire que : $\forall f \in E, N_0(f) \leq N_1(f)$.
- Existe-t-il une fonction f non identiquement nulle telle que $N_1(f) = N_0(f)$?
- Les normes N_0 et N_1 sont-elles équivalentes?

3.20.2

Soit $\alpha \in \mathbf{C}$ et A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ définie par : $A_{i,j} = \alpha^{i+j-2}$.

- Déterminer le rang de A , puis ses valeurs propres.
- Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles A n'est pas diagonalisable?

3.21 (Emma Pelerin)**3.21.1**

- Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois de Poisson de paramètres λ et μ . Montrer que $X + Y$ suit une loi de Poisson.
- Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi géométrique de paramètre p . Déterminer la loi de $X + Y$.
- Donner la fonction génératrice de la somme de deux variables aléatoires indépendantes X et Y .
- Donner la fonction génératrice d'une loi uniforme sur $[0, n - 1]$.
- Montrer que, si n n'est pas premier, une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, n - 1]$ peut s'écrire comme somme de deux variables aléatoires indépendantes non constantes.

3.21.2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et H un hyperplan de E stable par u .

- Montrer qu'il existe λ tel que $\text{Im}(u - \lambda \text{Id}_E) \subset H$.
- Montrer qu'un tel scalaire est valeur propre de u .

3.22 (Solène Pelong)**3.22.1**

- 1) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Donner une CNS pour que A soit diagonalisable.
- 2) Soit $(e_1, e_2, \dots, e_{2p})$ la base canonique de \mathbf{R}^{2p} et f l'endomorphisme de \mathbf{R}^{2p} représenté dans cette base par la matrice A définie par : $A_{i, 2p+1-i} = \alpha_i$ pour $1 \leq i \leq 2p$; et $A_{i,j} = 0$ pour $j \neq 2p+1-i$.
 - a) Représenter la matrice A .
 - b) Montrer que, pour tout $1 \leq i \leq 2p$, le sous-espace $E_i = \text{Vect}(e_i, e_{2p+1-i})$ est stable par f .
 - c) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si sa restriction à chacun des E_i l'est.
 - d) En déduire une CNS pour que A soit diagonalisable.
- 3) Que dire en dimension impaire?

3.22.2

Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $\alpha > 1$ on pose $R_n(\alpha) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

- a) Justifier l'existence de R_n et donner sa limite quand n tend vers l'infini.
- b) Trouver un équivalent de R_n quand n tend vers l'infini.

3.23 (Antonin Perenne)**3.23.1**

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans \mathbf{R} .

Pour f et g dans E , on pose $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$. On considère les sous-espaces de E : $F = \{f \in E : \forall x \in [0, 1], f(x) = 0\}$ et $G = \{g \in E : \forall x \in [-1, 0], f(x) = 0\}$.

- 1) Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .
- 2) Montrer que F et G sont en somme directe orthogonale.
- 3) F et G sont-ils supplémentaires?
- 4) Justifier l'inclusion $G \subset F^\perp$.
- 5) On veut montrer l'égalité.
Pour $g \in F^\perp$, soit f_n nulle sur $[0, 1]$, égale à $g(0)$ sur $[-1, -\frac{1}{n}]$ et affine sur $[-\frac{1}{n}, 0]$.
 - a) Calculer $\langle f_n, g \rangle$ pour établir que $g(0) \int_{-1}^1 g(x) dx = 0$.
 - b) Conclure en considérant h nulle sur $[0, 1]$ telle que $h(x) = g(0) - g(x)$ pour $x \in [-1, 0]$.

3.23.2

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi $\mathcal{G}(p)$; et $Z = \min(X, Y)$.

- a) Donner la loi de X , son espérance et sa variance.
- b) Calculer $P(X > 2)$.
- c) Plus généralement, calculer $P(X > n)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.
- d) Calculer $P(Z > n)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.

3.24 (Camille Renaud)**3.24.1**

Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose $I_n = \int_0^{\pi/4} (\tan x)^n dx$.

- 1) Déterminer la limite de I_n lorsque n tend vers l'infini.
- 2) Calculer $I_n + I_{n+2}$. (on pourra effectuer le changement variable $t = \tan(x)$)
- 3) En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
- 4) Justifier la convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n$ puis calculer la valeur de cette somme.
(on cherchera $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ tel que $\frac{1}{(1+u^2)(1+u)} = \frac{a}{1+u} + \frac{b+cu}{1+u^2}$)

3.24.2

- a) Rappeler la définition de matrices semblables.
- b) Soit n en entier supérieur ou égale à 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ non inversible.
Montrer que A est semblable à une matrice dont la première colonne est nulle.
En déduire qu'il existe une matrice B non nulle telle que $AB = BA = 0_n$.

3.25 (Kevin Salib)**3.25.1**

Soit $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^n dt$.

- 1) Justifier l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
- 2) On donne $I_0 = \sqrt{\pi}$. Trouver l'expression de I_n pour $n \in \mathbf{N}^*$.
- 3) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$ en posant $\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} P(t)Q(t) dt$.
- 4) Calculer $d(X^3, \mathbf{R}_2[X])$ pour ce produit scalaire.

3.25.2

- a) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois de Poisson de paramètres λ et μ . Montrer que $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.
- b) Oubliée
- c) Soit Z une variable aléatoire indépendante de X , suivant une loi géométrique de paramètre p . Calculer $P(X = Z)$.

3.26 (Lucas Syhanath)**3.26.1**

Pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $u_n(x) = \frac{\ln(1+x^2n^2)}{n^2 \ln(1+n)}$.

- 1) Montrer que la série de terme général $u_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathbf{R}$.
- 2) Montrer que la somme de la série est continue sur \mathbf{R} .
- 3) La série des dérivées converge-t-elle normalement sur \mathbf{R} ?

- 4) Montrer que la série des dérivées converge uniformément sur \mathbf{R} .
(on pourra pour cela effectuer une comparaison série intégrale)
- 5) Montrer que la somme de la série est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R} .

3.26.2

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

- a) On suppose que $A^3 + A^2 + 2A + I_n = 0_n$. Montrer que A est inversible et préciser son inverse.
- b) On suppose que $A^2 + A + 2I_n = 0_n$. Montrer que n est pair.

3.27 (Lorelei Tatar)**3.27.1**

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-xt} dt$.

- 1) Montrer que F est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
- 2) Montrer que F est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.
- 3) Déterminer les limites de $F(x)$ et de $F'(x)$ en $+\infty$.
- 4) Montrer que $F'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$ pour $x > 0$.
- 5) Déterminer la valeur de $F(x)$ pour $x \in \mathbf{R}_+$.
- 6) Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$. Exprimer I en fonction de $F(0)$ puis déterminer sa valeur.

3.27.2

Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E .

- 1) Montrer que toute valeur propre non nulle de $u \circ v$ est valeur propre de $v \circ u$.
- 2) Montrer que si E est de dimension finie, alors $u \circ v$ et $v \circ u$ ont même spectre.
- 3) Dans cette question, $E = \mathbf{R}[X]$, $u(P) = \int_0^X P(x) dx$ et $v(P) = P'$.
Déterminer $u \circ v$ et $v \circ u$ puis montrer que 0 est valeur propre de l'un de ces deux endomorphismes mais pas de l'autre.

3.28 (Julia Trabal-Gozlan)**3.28.1**

Pour $k \in \mathbf{N}$ et $n \in \mathbf{N}^*$ on pose : $I_{k,n} = \int_0^{+\infty} t^k e^{-nt} dt$ et $a_n = I_{n,n}$.

- 1) Déterminer la limite de $(1 - \frac{1}{n})^n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- 2) Montrer que l'intégrale $I_{k,n}$ est bien définie.
- 3) Calculer explicitement $I_{k,n}$ en fonction de k et n .
- 4) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.
- 5) Déterminer la nature de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^n$ et de $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n e^n$.
- 6) Montrer que, pour tout $x \in]-R, R[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{+\infty} \frac{tx}{e^t - tx} dt$.

3.28.2

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbf{N} vérifiant :

$$P(X = k, Y = n) = \binom{n}{k} p (1-p)^n 2^{-n} \text{ pour } k \leq n \text{ et } 0 \text{ sinon, où } p \in [0, 1].$$

- Déterminer la loi marginale de Y .
- Donner le développement en série entière de $\frac{1}{1-x}$.
- En déduire : $\forall k \in \mathbf{N}, \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.
- Déterminer la loi marginale de X .
- Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

3.29 (Youstos Wahba)**3.29.1**

$$\text{Soit } I = \int_0^1 \frac{\ln(t) \ln(1-t^2)}{t^2} dt.$$

- Justifier la convergence de l'intégrale I .
- Donner le développement en série entière de $\ln(1-t^2)$ pour $t \in [0, 1[$.
- Montrer que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)^2}$.
- Déterminer a, b et c tels que : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \frac{1}{n(2n-1)^2} = \frac{a}{n} + \frac{b}{2n-1} + \frac{c}{(2n-1)^2}$.
- Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{2n-1}\right) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
- Sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer enfin que : $I = \frac{\pi^2}{4} - 2 \ln(2)$.

3.29.2

Étant donné $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on définit pour tout $x \in \mathbf{R}$ la matrice $M(x)$ par :
 $[M(x)]_{i,j} = A_{i,j} + x$ pour $1 \leq i, j \leq n$. On s'intéresse à $D(x) = \det(A(x))$.

- On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $D(x)$.
- Montrer que $D(x)$ est toujours un polynôme en x , de degré au plus 1.
- En déduire la valeur de $\det(A)$ lorsque $A_{i,i} = a$, $A_{i,j} = b$ pour $i > j$ et c pour $i < j$.

4 Mines-Ponts**4.1 (Étienne Bouilleau)****4.1.1**

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.

On suppose qu'il existe un réel λ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + w_n$ avec $\sum w_n$ absolument convergente.

- Montrer que la série de terme général $\frac{\lambda}{n} + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge absolument.
- En déduire que la convergence de la suite de terme général $n^\lambda u_n$.
- Montrer ainsi la convergence de la série de terme général $\frac{n^n}{n! e^n}$.

4.1.2

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E .

On suppose que u est annulé par un polynôme dont 0 est racine simple.

Montrer qu'alors : $E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$.

4.2 (Maxime Flotron)

4.2.1

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et f un endomorphisme de \mathbf{C}^n .

Étant donné un supplémentaire H de $\text{Ker}(f)$, on considère $g : H \rightarrow \text{Im}(f)$; $x \mapsto f(x)$.

- 1) Montrer que g est un isomorphisme.
- 2) Soit $r = \text{rg}(f)$. Montrer qu'il existe deux bases \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 de \mathbf{C}^n telles que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) = J_r$, où J_r est la matrice diagonale ayant 1 sur les r premiers coefficients diagonaux, et 0 ailleurs.
- 3) Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice de rang r . Montrer qu'il existe des matrices inversibles P et Q telles que $C = PJ_rQ$, où J_r est la même matrice que précédemment.
- 4) Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $AC = CB$.
Montrer que A et B ont au moins r valeurs propres communes (comptées avec multiplicité).
- 5) Lorsque C est inversible, montrer le résultat précédent rapidement.

4.2.2

a) Donner un équivalent de $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$ quand

b) En déduire un équivalent de la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \int_{u_n}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

4.3 (César Gauzins)

4.3.1

- 1) Comparer $\text{tr}(A)$ et $\text{tr}(AB)$ pour $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ et $B \in O_n(\mathbf{R})$.
- 2) Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, établir la convergence de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$. On $\exp(M)$ la valeur de cette somme.
- 3) On admet que si $MN = NM$, alors $\exp(M+N) = \exp(M)\exp(N)$.
Montrer que si B est antisymétrique alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\exp(xB) \in O_n(\mathbf{R})$.

4.3.2

Trouver f continue de \mathbf{R} dans \mathbf{R} telle que l'équation $y''(x) + y'(x) + f(x)y(x) = 0$ admette une base de l'ensemble des solutions de la forme (g, g^2) avec g de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbf{R} .

4.4 (Wandrille Loury)

4.4.1

- 1) Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Montrer que : $0 < \sin \theta < \theta < \tan \theta$.
- 2) En déduire que : $(\cotan \theta)^2 < \frac{1}{\theta^2} < 1 + (\cotan \theta)^2$.

- 3) Montrer que : $\frac{\sin((2n+1)\theta)}{(\sin\theta)^{2n+1}} = \operatorname{Im}((i + \cotan\theta)^{2n+1})$.
- 4) En déduire qu'il existe $P_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que : $\forall \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[, P_n((\cotan\theta)^2) = \frac{\sin((2n+1)\theta)}{(\sin\theta)^{2n+1}}$.
- 5) Que vaut la somme des racines de P_n ?
- 6) Montrer que les racines de P_n s'écrivent sous la forme : $\left(\cotan\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2$ pour $1 \leq k \leq n$.
- 7) En déduire que : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

4.4.2

On considère une station d'appel pour laquelle le nombre d'appels entre 10h et 11h est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ . La probabilité pour qu'un appel concerne le standard A est $p \in [0, 1]$. Soit Y la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant choisi le standard A entre 10h et 11h. Donner la loi de Y .

4.5 (Solène Pelong et Loïc Jeanjean)

4.5.1

On définit une suite (f_n) par : $f_0 = 1$, $f_1 = 1$ et $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
 Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on considère la matrice $A_n = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ définie par : $a_{i,j} = f_{i+j-2}$.

- 1) Représenter explicitement A_2 , A_3 , et A_4 .
- 2) Donner l'ordre de la valeur propre 0 dans A_n .
- 3) Montrer que A_n admet deux valeurs propres distinctes $a_n < 0 < b_n$.
- 4) Étudier les suites (a_n) et (b_n) .

4.5.2

Soit (u_n) une suite réelle et $v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k$.

- a) Montrer que si la suite (u_n) converge, la suite (v_n) converge vers la même limite.
- b) Étudier la réciproque.

4.6 (Lucas Syhanath)

4.6.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ on considère l'endomorphisme de $\mathcal{M}_p(\mathbf{C})$ défini par : $\Delta(M) = AM - MA$.

- 1) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, \forall (M, N) \in \mathcal{M}_p(\mathbf{C}) \times \mathcal{M}_p(\mathbf{C}), \Delta^n(MN) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^{n-k}(M) \Delta^k(N)$.
- 2) Soit $H \in \mathcal{M}_p(\mathbf{C})$ et $B = \Delta(H)$. On suppose que $\Delta(B) = 0_p$.
 - a) Montrer que $\Delta^{n+1}(H^n) = 0_p$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
 - b) Montrer que $\Delta^n(H^n) = n!B$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
 - c) Soit $\|\cdot\|$ une norme vérifiant : $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_p(\mathbf{C}) \times \mathcal{M}_p(\mathbf{C}), \|MN\| \leq \|M\| \|N\|$.
 Montrer que $\|\Delta(H^n)\|^{\frac{1}{n}}$ tend vers une limite finie lorsque n tend vers l'infini.

4.6.2

On considère des chemins M_0, \dots, M_{n-1} constitués de n points $M_k = (x_k, y_k)$ vérifiant :
 $M_0 = (0, 0)$ puis, pour $0 \leq k \leq n-2$, $(x_{k+1} = x_k \text{ et } y_{k+1} = y_k \pm 1)$ ou $(x_{k+1} = x_k \pm 1 \text{ et } y_{k+1} = y_k)$.
 Soit c_n le nombre de tels chemins vérifiant $M_i \neq M_j$ pour $i \neq j$ (chemins auto-évitant).

- Que valent c_1 et c_2 ?
- Montrer que : $\forall (n, m) \in \mathbf{N}^2, c_{n+m} \leq c_n c_m$.
- On note, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \ln(c_n)$. On fixe $m \in \mathbf{N}^*$ et $\varepsilon > 0$. En utilisant la division euclidienne de n par m , montrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n > N$, $\frac{u_n}{n} \geq \frac{u_m}{m} - \varepsilon$.
- Montrer que $\frac{u_n}{n}$ tend vers $\sup \left\{ \frac{u_n}{n}, n \in \mathbf{N}^* \right\}$.

4.7 (BEOS 8693)**4.7.1**

Soit $n \in \mathbf{N}$ et a_0, a_1, \dots, a_n des réels 2 à 2 distincts.

- Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$ en posant : $(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$.
- Donner la dimension de $F = \{P \in \mathbf{R}_n[X] \text{ tq } \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0\}$.
- Déterminer la distance d'un polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$ à F .

4.7.2

Soit (z_n) une suite de nombres complexes telle que : $\forall n \neq m, |z_n - z_m| > \sqrt{2}$.

- On pose $M_n = (\operatorname{Re}(z_n), \operatorname{Im}(z_n))$ et l'on fixe $A > 0$.
Montrer que l'ensemble des indices n tels que $M_n \in [-A, A]^2$ est fini.
- En déduire que $|z_n| \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$.
- Montrer que la série de terme général $|z_n|^{-3}$ est convergente.

4.8 (BEOS 8742)**4.8.1**

Pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ on pose $f(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{1+y^{2n}}$.

- Déterminer le domaine de définition de f et le représenter graphiquement.
- Déterminer les dérivées partielles de f .

4.8.2

Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbf{C})$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $A^k = 0_4$.

- Montrer qu'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $A^p = 0_4$ et $A^{p-1} \neq 0_4$.
- On suppose $p = 4$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.9 (BEOS 8759)**4.9.1**

Soit $\varphi : x \mapsto e^{-x^2}$.

On admet que φ est intégrable sur \mathbf{R} et que son intégrale vaut $\sqrt{\pi}$.

- 1) Montrer que, pour tout entier naturel n , il existe un unique polynôme H_n tel que :
 $\forall x \in \mathbf{R}, \varphi^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) \varphi(x)$. Préciser le degré et le coefficient dominant de H_n .
- 2) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$ en posant : $\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) Q(t) \varphi(t) dt$.
- 3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $\langle P, H_n \rangle = \langle P', H_{n-1} \rangle$.
En déduire que la famille (H_n) est orthogonale. Calculer $\|H_n\|^2$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
- 4) Pour $(x, t) \in \mathbf{R}^2$, étudier la convergence de la série de terme général $\frac{t^n H_n(x)}{n!}$.

4.9.2

Dénombrer le nombre de parties A de $\llbracket 1, n \rrbracket$ ayant p éléments et telles que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad i \in A \text{ ou } i+1 \in A$$