17. Mathématiques

17.1. Introduction

L'épreuve de mathématiques est une épreuve sans préparation d'une durée réelle légèrement inférieure à 30 minutes. L'usage de la calculatrice y est autorisé, mais est très rare dans les faits. Elle porte sur le programme de PSI et l'intersection des programmes de MPSI et de PCSI.

Le candidat se voit proposer un exercice qui comporte peu de questions, d'autres pouvant être données au fur et à mesure de l'épreuve et en fonction de l'avancée du candidat. L'exercice est progressif et commence par une question de cours ou une application directe d'un résultat du programme.

Il est tout à fait possible d'avoir une bonne note sans avoir répondu à toutes les questions. Le sujet proposé est avant tout un support pour évaluer les connaissances du candidat sur plusieurs parties du programme, sa faculté à mener un dialogue réfléchi avec l'interrogateur et sa capacité à exposer clairement le cheminement de sa pensée.

Dans le même but, l'interrogateur peut être amené à poser quelques questions en dehors de l'exercice, ce sans corrélation avec le niveau de la prestation.

17.2. Analyse globale des résultats

Cette année encore, l'oral de mathématiques a permis de classer les admissibles de façon efficace. L'épreuve, avec 12,13 de moyenne et un écart type d'environ 3,21, a bien joué son rôle.

Le niveau moyen de l'épreuve est comparable à celui de l'an passé. Toutefois, nous assistons à un resserrement des notes, qui a conduit à un écart-type en légère baisse : d'une part, la diminution du nombre de candidats très faibles, déjà notée les années antérieures s'est confirmée ; d'autre part, les candidats exceptionnels ont été plus rares que les années précédentes.

Si les points positifs indiqués l'an passé sont encore d'actualité, à savoir

– étudiants à l'aise à l'oral et combatifs,
– et techniques et résultats classiques de seconde année bien assimilés,

les réserves faites lors de la précédente session ne le sont pas moins :

– les candidats ne font quasiment jamais spontanément de dessins ou schémas ;
– les très rares notions de géométrie restées au programme, telles celles de tangente à une courbe ou de plan tangent à une surface données par une équation cartésienne, sont souvent ignorées ;
– certains admissibles cherchent systématiquement à utiliser les grands résultats de PSI pour éviter de réfléchir à des solutions adaptées au problème, et souvent du reste simples.

Le fait marquant de la session 2025 est la méconnaissance importante du cours de première année (algèbre linéaire, fonction d'une variable réelle…). Certes, le phénomène n'est pas nouveau, mais il a été ressenti lors de cette session avec une acuité particulière. La majeure partie des oraux ratés l'ont été par une ignorance grave des notions de première année.

L'année prochaine, le jury mettra plus qu'à l'accoutumée l'accent sur les bases du programme et il invite les étudiants de première année à un apprentissage profond du cours, ceux de seconde à une révision précoce de celui-ci. Il compte beaucoup sur les enseignants des deux années de la filière pour répercuter ce message auprès de leurs étudiants.

17.3. Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Nous allons donner quelques conseils aux étudiants qui préparent le concours Centrale-Supélec. Beaucoup figuraient déjà dans les précédents rapports, d'autres non. Nous conseillons aux candidats de la prochaine session de lire également les rapports des deux années précédentes.

Pour bien réussir l'épreuve de mathématiques, il faut avant toute chose apprendre et maîtriser le cours des deux années. Notons qu'aucun argument hors programme ne sera accepté par l'examinateur.

Le jury remarque que certains admissibles sont parfois bloqués par la méconnaissance de résultats élémentaires de première année voire de terminale, quelques exemples :

- expression des racines n^{e} de l'unité (et factorisation sur le corps $\mathbf{C}$ de $X^n - 1$) et plus généralement les manipulations de base des nombres complexes ;
- calculs de primitives élémentaires ;
- formules de trigonométrie ;
- détermination du maximum d'un trinôme du second degré, sans recours à une étude de fonctions.

Nous invitons les étudiants à s'assurer le plus tôt possible dans leur préparation au concours, qu'ils maîtrisent tous ses points.

Pour ce qui est de la présentation, les examinateurs attendent de l'étudiant qu'il ne se contente pas d'écrire au tableau, mais qu'il se retourne de temps à autre, soit dynamique, propose des stratégies de résolution et écoute leurs remarques. Trop de candidats chaque année s'entêtent malgré les demandes de l'interrogateur à changer de méthode ; outre que cette attitude conduit souvent à l'échec, elle ne peut être appréciée que défavorablement dans une épreuve qui teste, entre autres, les capacités d'échange et de dialogue scientifique. Le tableau doit à la fin de l'épreuve garder le plan de la résolution de l'exercice, les formules importantes qui auront jalonné celle-ci. Nous conseillons d'utiliser une partie du tableau comme brouillon et de reporter, dans une autre, les résultats acquis afin qu'ils restent accessibles pendant toute l'épreuve.

D'une manière générale, l'utilisation de dessins, de figures ou de schémas est insuffisante. Le jury encourage et apprécie le recours spontané à des illustrations graphiques, notamment pour illustrer des théorèmes comme celui de Rolle ou des valeurs intermédiaires, présenter des méthodes comme la comparaison série-intégrale, visualiser la tangente à une courbe ou le plan tangent à une surface.

En début d'épreuve, la lecture, la copie quasi intégrale au tableau de l'énoncé, la présentation générale à l'oral du sujet constituent autant de pertes de temps ; les membres du jury interrogent toujours en ayant l'énoncé de l'exercice et le candidat est invité à entrer d'emblée dans le vif du sujet.

Passons à la résolution elle-même de l'exercice. Elle doit obéir à deux règles : rigueur et clarté.

Avant tout, il est attendu d'un admissible qu'il fasse preuve de rigueur et de précision. Quand il applique un théorème, il doit en citer et en vérifier toutes les hypothèses. Ainsi, par exemple, exprimer qu'une matrice est diagonalisable en écrivant $A = PDP^{-1}$, sans autre commentaire, témoigne d'un manque de précision notamment sur le corps de base. De même, parler de la continuité de f « sur 0 1 » n'a pas de sens ; le candidat doit spontanément préciser la nature de l'intervalle, ouvert, fermé etc. Pour montrer la convergence d'une série par majoration, il faut mentionner la positivité de son terme général et prendre la même précaution avec une intégrale. Écrire un développement en série entière d'une fonction usuelle doit être accompagné du domaine de validité. Dans le même ordre d'idée, le recours très fréquent à des expressions comme « c'est continu » ou « ça converge » est à bannir au profit de phrases comportant un sujet précis : la fonction est continue, la suite converge ou la série converge. Enfin, dans l'étude d'une convergence d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$, confondre comme on le voit trop souvent, le nombre $f_n(x)$ et la fonction f_n est non seulement fautif, mais occasionne des fautes majeures et pénalisantes.

Ensuite, la clarté du raisonnement s'impose. Il est primordial que l'examinateur sache celui qui est retenu par l'étudiant qu'il a en face de lui. Ce dernier à l'oral n'est pas tenu, comme à l'écrit, de tout rédiger. Néanmoins, il doit informer l'interrogateur du type de raisonnement qu'il mène : raisonnement par équivalence, raisonnement par double implication, raisonnement par récurrence. De la même façon, si la quantification des variables obéit à l'oral à des exigences moins strictes qu'à l'écrit, le candidat doit au moins oralement informer l'examinateur du statut de chacune d'elles. Rappelons que pour montrer qu'une propriété est vraie pour tous les éléments d'un ensemble, il faut partir d'un élément quelconque de cet ensemble : par exemple, pour montrer que toutes les valeurs propres d'une matrice sont positives, on commence par écrire ou dire « soit λ une valeur propre de la matrice ». Cette année encore les candidats se précipitent sur une preuve par « analyse-synthèse ». Rappelons que ce type de raisonnement est approprié pour montrer l'existence et l'unicité d'un objet mathématique, mais n'est pas la panacée universelle.

Analyse

Le cours de calcul différentiel est dorénavant dans son ensemble maîtrisé. Cependant, la partie **d) applications géométriques** du chapitre calcul différentiel reste un point noir. Ceci est dommage puisque, d'une part, les exercices portant sur cette partie sont souvent simples, proches du cours et devraient permettre aux admissibles d'avoir une bonne note et, d'autre part, car il s'agit de connaissances transverses d'une grande importance dans les sciences.

La recherche de primitives usuelles n'est ni naturelle ni aisée pour beaucoup de candidats.

La maîtrise des développements limités est loin d'être acquise par tous. Rappelons que pour donner le développement limité d'une composée $f \circ g$ de deux applications, on commence par celui de g. Peu d'étudiants utilisent des développements limités au sens fort (avec des grands O) : c'est dommage car ils sont, suivant les situations, plus ou autant économiques que ceux avec un petit o ; certains candidats ignorent la définition d'un grand O.

La formule de Taylor avec reste intégral n'est pas mieux connue qu'en 2024 : cette formule est pourtant importante pour obtenir des résultats globaux (par exemple des inégalités).

Les séries entières posent encore de grosses difficultés. Le jury rappelle que la règle de d'Alembert au programme n'est pas le seul outil pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière. Très peu d'étudiants ont par exemple le réflexe de dire : $(a_n)_{n\geq 0}$ est borné donc le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1. Le lien entre les rayons de convergence de deux séries et ceux de leur série produit ou somme est très mal connu. Enfin, la définition même du rayon de convergence n'est pas toujours sue.

Il est à noter des confusions fréquentes sur le vocabulaire : majorée, majorée en valeur absolue, bornée. Du reste, les étudiants interrogés omettent souvent les valeurs absolues, pourtant nécessaires lorsqu'il s'agit de montrer la convergence d'intégrales ou de séries. Dans $\mathbf{C}$, l'omission du module conduit à des inégalités entre complexes.

Pour étudier une intégrale impropre, les étudiants ne regardent souvent que les bornes (même si c'est inutile) sans se demander au préalable sur quel domaine la fonction est continue ou continue par morceaux.

L'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires est mal maîtrisé et, pour de nombreux candidats, est pollué par des hypothèses de monotonie.

Les deux théorèmes d'intégration terme à terme de la somme d'une série de fonctions au programme sont de natures différentes : l'un s'applique à des fonctions définies sur un segment et nécessite la convergence uniforme, l'autre à des fonctions définies sur un intervalle quelconque et se contente d'une convergence simple de la série. Beaucoup de candidats mélangent ces deux résultats.

Algèbre

Il ne faut pas confondre somme directe et supplémentaire, et il faut maîtriser la définition de $E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_k$ souvent utilisée mais rarement comprise.

On note une faible utilisation et maîtrise du théorème du rang. Du reste, la notion de rang et de rang d'une matrice est souvent floue et confuse chez les candidats.

Les manipulations élémentaires de matrices carrées d'ordre 2 ou 3 donnent parfois lieu à de grandes difficultés. Au delà des résultats théoriques, on attend des candidats une maîtrise technique dans des cas concrets et simples. Dans le même ordre d'idée, les matrices de rang un posent des problèmes aux candidats.

L'interprétation en termes d'endomorphismes des colonnes d'une matrice n'est pas naturelle pour tous.

La définition géométrique d'une projection ou d'une symétrie, liée à la donnée de deux espaces supplémentaires, pose des problèmes à beaucoup de candidats.

Dans le domaine de la réduction des endomorphismes, le polynôme caractéristique n'est pas l'alpha et l'omega ; l'existence d'un polynôme scindé à racines simples est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable ; un résultat très peu employé et parfois ignoré est qu'un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si le polynôme $\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}(X-\lambda)$ est annulateur. L'expression des coefficients remarquables du polynôme caractéristique est floue chez trop de candidats. Le fait que les valeurs propres d'une matrice triangulaire se trouvent sur la diagonale n'est pas acquis par tous les étudiants. La détermination de la dimension des sous-espaces propres d'une matrice est le plus fréquemment abordée par résolution du système $AX = \lambda X$, alors que la recherche du rang de $A - \lambda I_n$ par opérations sur les colonnes est souvent plus rapide et élégante.

Probabilités

Le dénombrement est très insuffisamment maîtrisé par de nombreux candidats. Les futurs admissibles sont invités à travailler ce point de première année utile dans le cadre des probabilités uniformes.

Trop d'étudiants mélangent les objets probabilistes dont ils ont une vision très confuse et dont ils ignorent la définition précise. Nous conseillons aux futurs candidats de bien assimiler les fondements de la discipline.

Il est préférable de ne pas commencer par une égalité de probabilités, mais par une égalité entre événements. Ceci permet d'éviter les fréquentes confusions entre les différents objets en probabilités que nous venons de mentionner.

De nombreuses inversions des inégalités dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev montrent que des élèves de classe préparatoire n'ont pas réfléchi au sens de cette formule, pourtant cruciale.

On note trop d'hésitations sur l'expression de la covariance.

17.4. Conclusion

Le jury est, cette année encore, assez satisfait du niveau de l'épreuve, du travail fourni par les candidats dans nombre de parties du programme. Il félicite les étudiants et leurs enseignants pour les compétences acquises lors de leur préparation.

Cependant le jury déplore un manque de connaissance précise du cours, notamment celui de première année. Il avertit les futurs candidats que l'accent sera mis à la prochaine session sur la maîtrise des contenus fondamentaux au programme.

Il note enfin avec satisfaction qu'une grande majorité des candidats sont à l'aise durant l'épreuve et bien préparés à l'exercice de l'oral.