Exercice 1 Soit α la racine positive de $X^2 - X - 1$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^\alpha}$ est convergente et déterminer sa valeur. (*Indication :* poser $t = 1/u$)

Exercice 2 *(Mines-télécom 25)* Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{\frac{\sin x}{x}} - 1\right) \mathrm{d}x$.

Exercice 3 *(Mines-Télécom 22)*
Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ puis étudier celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 *(Mines-Télécom 23)*

a) Déterminer un équivalent de $\frac{1}{t} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$ quand t tend vers $+\infty$.

b) Après avoir justifié sa convergence, calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right) \mathrm{d}t$.

Exercice 5 *(CCINP 23)*

1) Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et f une fonction de classe C^1 de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$.
Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on pose : $I_n = \int_a^b f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2) Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.
   a) Montrer que I est bien convergente.
   b) Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{x}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = I$.
   c) Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (J_n - K_n) = 0$.
   d) Montrer que, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $J_{2p+1} = J_{2p-1}$. En déduire la valeur de I.

Exercice 6 *(CCINP 24)* Pour $(n,p) \in \mathbf{N}^2$ on pose : $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^p \ln(x)^n\,\mathrm{d}x$.

a) Justifier l'existence de $I_{n,p}$.

b) Pour $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}$, trouver une relation entre $I_{n,p}$ et $I_{n-1,p}$.

c) En déduire la valeur de $I_{n,p}$ pour tout $(n,p) \in \mathbf{N}^2$.

Exercice 7 *(CCINP 25)* Pour $x \in \mathbf{R}_+$ on pose : $f(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$.

1) Justifier l'existence et la continuité de f sur $\mathbf{R}_+$.

2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et préciser la valeur de $f'(x)$.

3) f est-elle dérivable à droite en 0 ?

Exercice 8 *(CCINP 26)* Pour $n \in \mathbf{N}$, on considère $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{nx}}{(1+2\mathrm{e}^x)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$.

1) Justifier la convergence de l'intégrale définissant I_n.

2) Justifier la convergence de la suite (I_n) et déterminer sa limite.

3) Montrer que : $\forall n \geqslant 1$, $I_n = \frac{1}{2n3^n} + \frac{n-1}{2n} I_{n-1}$.

4) En déduire une expression de $n2^n I_n$ en fonction de n, puis un équivalent de I_n.

Exercice 9 *(Centrale 23)*
Soit f une application continue de $[1,+\infty[$ dans $\mathbf{R}$ telle que $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente.
Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $\alpha > 0$.

Exercice 10 *(Mines-Ponts 26)* Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^4)^n}\,\mathrm{d}x$.

1) Montrer que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
2) En posant $u = \frac{1}{x}$, montrer que $I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{u^2+1}{1+u^4}\,\mathrm{d}u$.
3) En posant $v = u - \frac{1}{u}$, calculer I_1. (*Indication :* que vaut v^2 ?)
4) En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Exercice 11 *(Mines-Ponts 25)* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que l'on définit ainsi une application de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$ et préciser $f'(x)$.
b) Montrer que $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.
c) Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.
d) En déduire que f est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$, puis montrer que $\int_0^{+\infty} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$.

Exercice 12 *(Mines-Ponts 25)* Soit f continue et intégrable de $[2,+\infty[$ dans $\mathbf{R}_+^*$.
On pose $g(x) = f(x)^{1-1/x}$. Que dire de l'intégrabilité de g sur $[2,+\infty[$?

Exercice 13 *(Mines-Ponts 24)*

1) Justifier la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left\lfloor 1/\sqrt{x} \right\rfloor\,\mathrm{d}x$.
2) Calculer la valeur de I, en admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 14 *(Mines-Ponts 24)*

1) Montrer que $x \mapsto x^7 + x$ est une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $\mathbf{R}_+$.
2) La fonction $x \mapsto \sin(x^7+x)$ est-elle intégrable sur $\mathbf{R}_+$?
3) L'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(x^7+x)\,\mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

Exercice 15 *(Mines-Ponts 26)* Soit f une fonction continue de $[0,+\infty[$ dans $\mathbf{R}_+^*$.
On suppose que $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ tend vers $\ell \in]0,1[$ quand x tend vers $+\infty$.

1) Montrer qu'il existe $q \in]0,1[$ et $x_0 \in [0,+\infty[$ tels que : $\forall x \geqslant x_0$, $\forall k \in \mathbf{N}$, $f(x+k) \leqslant q^k f(x)$.
2) En déduire la nature de $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 16 *(Centrale 24)* Soit f continue de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ et $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t$.
On suppose que $f(x)F(x) \to L \in \mathbf{R}_+^*$ quand $x \to +\infty$.

1) Montrer que $f(x)$ a une limite finie quand $x \to +\infty$ et préciser cette limite.
2) Soit g continue de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que si $g(x) \to \ell$ quand $x \to +\infty$, alors $\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \to \ell$.
3) Trouver des équivalents de $F(x)$ et de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 17 *(Centrale 25)*

1) Justifier l'existence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}$ puis calculer sa valeur.
2) Soit I un intervalle ouvert et y de classe C^1 sur I vérifiant : $y' = y^2 + y + 1$.
Montrer que I est borné puis expliciter y.