

Exercice 1 Soit α la racine positive de $X^2 - X - 1$.

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^\alpha}$ est convergente et déterminer sa valeur. (*Indication* : poser $t = 1/u$)

Exercice 2 (*Mines-télécom 25*) Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \left(e^{\frac{\sin x}{x}} - 1 \right) dx$.

Exercice 3 (*Mines-Télécom 22*)

Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ puis étudier celle de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} dx$.

Exercice 4 (*Mines-Télécom 23*)

a) Déterminer un équivalent de $\frac{1}{t} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$ quand t tend vers $+\infty$.

b) Après avoir justifié sa convergence, calculer $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right) \right) dt$.

Exercice 5 (*CCINP 23*)

1) Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ et f une fonction de classe C^1 de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on pose : $I_n = \int_a^b f(x) \sin(nx) dx$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

2) Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

a) Montrer que I est bien convergente.

b) Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{x} dx$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = I$.

c) Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x} dx$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n - K_n) = 0$.

d) Montrer que, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $J_{2p+1} = J_{2p-1}$. En déduire la valeur de I .

Exercice 6 (*CCINP 24*) Pour $(n, p) \in \mathbf{N}^2$ on pose : $I_{n,p} = \int_0^1 x^p \ln(x)^n dx$.

a) Justifier l'existence de $I_{n,p}$.

b) Pour $(n, p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}$, trouver une relation entre $I_{n,p}$ et $I_{n-1,p}$.

c) En déduire la valeur de $I_{n,p}$ pour tout $(n, p) \in \mathbf{N}^2$.

Exercice 7 (*CCINP 25*) Pour $x \in \mathbf{R}_+$ on pose : $f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right) dt$.

1) Justifier l'existence et la continuité de f sur $\mathbf{R}_+$.

2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et préciser la valeur de $f'(x)$.

3) f est-elle dérivable à droite en 0 ?

Exercice 8 (*CCINP 26*) Pour $n \in \mathbf{N}$, on considère $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{nx}}{(1+2e^x)^{n+1}} dx$.

1) Justifier la convergence de l'intégrale définissant I_n .

2) Justifier la convergence de la suite (I_n) et déterminer sa limite.

3) Montrer que : $\forall n \geq 1, I_n = \frac{1}{2n3^n} + \frac{n-1}{2n} I_{n-1}$.

4) En déduire une expression de $n2^n I_n$ en fonction de n , puis un équivalent de I_n .

Exercice 9 (Centrale 23)

Soit f une application continue de $[1, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$ telle que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ soit convergente.
Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$ converge pour tout $\alpha > 0$.

Exercice 10 (Mines-Ponts 26) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^4)^n} dx$.

- 1) Montrer que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
- 2) En posant $u = \frac{1}{x}$, montrer que $I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{u^2+1}{1+u^4} du$.
- 3) En posant $v = u - \frac{1}{u}$, calculer I_1 . (Indication : que vaut v^2 ?)
- 4) En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Exercice 11 (Mines-Ponts 25) Soit $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$.

- a) Montrer que l'on définit ainsi une application de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+$ et préciser $f'(x)$.
- b) Montrer que $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.
- c) Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ .
- d) En déduire que f est intégrable sur $\mathbf{R}_+$, puis montrer que $\int_0^{+\infty} f(u) du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$.

Exercice 12 (Mines-Ponts 25) Soit f continue et intégrable de $[2, +\infty[$ dans $\mathbf{R}_+^*$.
On pose $g(x) = f(x)^{1-1/x}$. Que dire de l'intégrabilité de g sur $[2, +\infty[$?

Exercice 13 (Mines-Ponts 24)

- 1) Justifier la convergence de $I = \int_0^{+\infty} [1/\sqrt{x}] dx$.
- 2) Calculer la valeur de I , en admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 14 (Mines-Ponts 24)

- 1) Montrer que $x \mapsto x^7 + x$ est une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $\mathbf{R}_+$.
- 2) La fonction $x \mapsto \sin(x^7 + x)$ est-elle intégrable sur $\mathbf{R}_+$?
- 3) L'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(x^7 + x) dx$ est-elle convergente ?

Exercice 15 (Mines-Ponts 26) Soit f une fonction continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}_+^*$.

On suppose que $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ tend vers $\ell \in]0, 1[$ quand x tend vers $+\infty$.

- 1) Montrer qu'il existe $q \in]0, 1[$ et $x_0 \in [0, +\infty[$ tels que : $\forall x \geq x_0, \forall k \in \mathbf{N}, f(x+k) \leq q^k f(x)$.
- 2) En déduire la nature de $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

Exercice 16 (Centrale 24) Soit f continue de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ et $F(x) = \int_0^x f(t)^2 dt$.

On suppose que $f(x)F(x) \rightarrow L \in \mathbf{R}_+^*$ quand $x \rightarrow +\infty$.

- 1) Montrer que $f(x)$ a une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$ et préciser cette limite.
- 2) Soit g continue de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que si $g(x) \rightarrow \ell$ quand $x \rightarrow +\infty$, alors $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \rightarrow \ell$.
- 3) Trouver des équivalents de $F(x)$ et de $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 17 (Centrale 25)

- 1) Justifier l'existence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^2}$ puis calculer sa valeur.
- 2) Soit I un intervalle ouvert et y de classe C^1 sur I vérifiant : $y' = y^2 + y + 1$.
Montrer que I est borné puis expliciter y .