

On considère dans tout l'exercice que $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $a \leq b$.

On note $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et l'on considère f et g **deux fonctions de E** .

On note enfin $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions h de E vérifiant $\int_a^b h^2(t)dt$ est convergente.

On s'intéresse dans cet exercice à la nature de l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)g(t)dt$,

en particulier à celle de $\int_a^b \frac{f(t)}{t}dt$, en fonction de celle de $\int_a^b f(t)dt$ ou $\int_a^b f^2(t)dt$.

Partie I. Cas particulier de l'intervalle $[a, b[$ borné

On suppose dans cette partie que $b \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que l'intervalle $[a, b[$ est borné.

1) Rappeler la définition de la convergence de l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$.

2) **2a.** Montrer que si f est constante, alors $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

2b. En déduire que si f est bornée, alors $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

3) **3a.** Montrer $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq 1 + x^2$

3b. En déduire que si $f \in \mathcal{F}$ alors $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

3c. Donner un contre-exemple simple pour $a = 1$ et $b = +\infty$, c'est-à-dire une fonction h continue sur $[1, +\infty[$ vérifiant :

$\int_1^{+\infty} h^2(t)dt$ est convergente et $\int_1^{+\infty} h(t)dt$ est divergente.

Partie II. Produit scalaire

On suppose de nouveau dans cette partie que $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1) **1a.** Montrer $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, |uv| \leq \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$.

1b. Montrer que si f et g appartiennent à $\mathcal{F}$, alors $\int_a^b f(t)g(t)dt$ est convergente.

2) En déduire que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de E .

3) Montrer que l'application φ définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{F}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \int_a^b f(t)g(t)dt \end{aligned}$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{F}$.

On notera désormais le produit scalaire $(f|g)$ au lieu de $\varphi(f, g)$ et $\|f\|$ pour la norme associée.

4) On suppose dans cette question que $a = 1$, $b = +\infty$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x}$.

4a. Montrer que la fonction g appartient à $\mathcal{F}$ et calculer $\|g\|$.

4b. Montrer que si f est positive sur $[1, +\infty[$ et que $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est convergente, alors $\int_1^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est convergente.

4c. Montrer que si $f \in \mathcal{F}$ alors $\int_1^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est convergente et qu'on a de plus

$$\left(\int_1^{+\infty} f(t)g(t)dt \right)^2 \leq \int_1^{+\infty} f^2(t)dt$$

Partie III. Règle d'Abel

On suppose dans cette partie que $\int_a^b f(t)dt$ est **convergente**. Le but est de montrer que si g est de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante et positive sur $I = [a, b[$ alors $\int_a^b f(t)g(t)dt$ est également convergente.

On définit sur I la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(u)du$.

1) 1a. Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

1b. Rappeler pourquoi F admet une limite finie en b^- , en déduire que F est bornée sur I .

Il existe donc $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in I, |F(x)| \leq M$.

2) Cas particulier

On suppose dans cette question que $a = 1, b = +\infty$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante et positive sur $[1, +\infty[$.

2a. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}dt$ est convergente.

2b. Pour $x \in [1, +\infty[$, à l'aide d'une intégration par parties, exprimer $\int_1^x f(t)g(t)dt$ en fonction de $\int_1^x \frac{F(t)}{t^2}dt$.

2c. En déduire que $\int_1^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est convergente et vaut $\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}dt$.

3) Soit g_1 une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

3a. Montrer que $\int_a^b g_1'(t)dt$ est convergente si et seulement si g_1 admet une limite finie en b^- .

3b. On suppose de plus g_1 décroissante et positive, montrer à l'aide de **III.1b** et **III.3a** que $\int_a^b F(t)g_1'(t)dt$ est absolument convergente.

4) On suppose que g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$, décroissante et positive.

Montrer, de la même manière qu'en **III.2**, que $\int_a^b f(t)g(t)dt$ est convergente.