

Exercice 1 (ENSEA 25)

Étudier, en fonction des paramètres réels α et β , l'intégrabilité sur $]1, +\infty[$ de $x \mapsto \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha \ln x}$.

Exercice 2 (ENSEA 23) Convergence et calcul de $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}} dx$.

Indication : calculer $u'(x)$ pour $u(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$.

Exercice 3 (Mines-Télécom 25) Soit $F : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} dt$.

- Pour $x \in \mathbf{R}$, calculer $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^x - 1}{\ln t}$.
- Montrer que pour $x = -1$, $F(x)$ diverge.
- Montrer que $F(x)$ converge pour $x > -1$.

Exercice 4 (Mines-Télécom 25) Soit $\beta \in]0, 1[$. Pour $x > 0$ et $t > 0$ on pose : $\varphi(x, t) = \frac{1}{t^\beta} - \frac{1}{(x+t)^\beta}$.

- Donner un équivalent de $\varphi(x, t)$ quand t tend vers $+\infty$.
- Établir l'intégrabilité de $t \mapsto \varphi(x, t)$ sur $\mathbf{R}_+^*$ puis calculer $\int_0^{+\infty} \varphi(x, t) dt$.

Exercice 5 (CCINP 25) On pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

- Montrer que l'on définit ainsi une application de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
- Montrer que : $\forall x > 0, f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}$.
 - Montrer que : $\forall x > 0, f(x) = -e^{-x} \ln x + \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$.
 - Montrer que f est intégrable sur $]0, +\infty[$.
- En effectuant une intégration par parties, calculer $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

Exercice 6 (CCINP 24 et 25)

- Justifier la convergence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^3}{t^2} dt$.
- Montrer que : $\forall t \in \mathbf{R}, \sin(t)^3 = \frac{3}{4} \sin(t) - \frac{1}{4} \sin(3t)$.
- Montrer que $I = \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.
- Montrer que $g(t) = \frac{\sin(t)-t}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0.
- En déduire la valeur de I .

Exercice 7 (X-ENS 21 et 23) Pour $a > 0$ on pose $I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2 - \frac{a^2}{t^2}} dt$ et $J(a) = a \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2 - \frac{a^2}{t^2}}}{t^2} dt$.

- Justifier l'existence de $I(a)$ et $J(a)$ puis montrer que $I(a) = J(a)$ pour tout $a > 0$.
- Montrer alors que $I(a) = \frac{e^{-2a}}{2} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{a}{t^2}\right) e^{-(t-\frac{a}{t})^2} dt$.
- En admettant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$, en déduire que $I(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}$.

Exercice 8 (Centrale 25)

- Avec Python, conjecturer la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^2}{t^2} dt$.
 - Idem pour $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^{2m+1}}{t} dt$ avec $m \in \mathbf{N}$. Qu'observe-t-on quand m tend vers $+\infty$?
- Établir la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^2}{t^2} dt$.
 - En effectuant une intégration par parties, montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^2}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.
- Prouver les conjectures faites en 1.b)