

**Exercice 1** (Mines-Télécom 25)

Montrer que la suite définie par  $u_n = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)}$  tend vers 0.

**Exercice 2** (Mines-Télécom 26) Pour  $n \in \mathbf{N}$  on pose :  $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \sin(nt) dt$ .

- 1) Établir la convergence de la suite  $(u_n)$ .
- 2) Montrer que  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - u_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .
- 3) Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n$ .

**Exercice 3** (Mines-Télécom 26)

Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 \in ]0, 1[$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_n^2)$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

Étudier la suite  $(u_n)$  puis déterminer la nature de la série de terme général  $u_n$ .

**Exercice 4** (Mines-Télécom 25)

Étudier la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$ .

**Exercice 5** (CCINP 26)

Déterminer la nature de  $\sum \frac{(-1)^n}{n} \int_{n^2}^{+\infty} e^{-t^2} dt$  puis de  $\sum (-1)^n \int_0^n e^{-n^2 t^2} dt$ .

**Exercice 6** (CCINP 25)

Étudier la nature de la série de terme général  $u_n = \cos\left(\pi n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$ .

Indication : Montrer que  $u_n = \frac{(-1)^n \pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

**Exercice 7** (CCINP 25) Étudier la série de terme général  $u_n = \frac{(-1)^n \sin(\ln(n))}{n}$ .

Indication : étudier  $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$ .

**Exercice 8** (Mines-Ponts 25)

Déterminer la nature de la série de terme général  $e^{u_n} - 2$  où  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)}$ .

**Exercice 9** (Mines-Ponts 25)

a) Donner un équivalent de  $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .

b) En déduire un équivalent de la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = u_n + \int_{u_n}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ .

**Exercice 10** (Mines-Télécom 23) Soit  $a_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} (\sin t)^{2n} dt$ .

- a) Montrer que la suite  $(a_n)$  est bien définie et déterminer sa limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- b) Montrer que :  $\forall n \in \mathbf{N}^*, (1 + 4n^2)a_n = (4n^2 - 2n)a_{n-1}$ .
- c) Soit  $b_n = a_n \sqrt{n}$ . Établir la convergence de la série de terme général  $\ln\left(\frac{b_n}{b_{n-1}}\right)$ .
- d) Déterminer la nature de la série de terme général  $a_n$ .

**Exercice 11** (Mines-Télécom 23) On définit une suite par  $u_0 > 0$  et  $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ .

- a) Montrer que la suite  $(u_n)$  est correctement définie et convergente.
- b) Montrer que la série de terme général  $u_n^2$  converge.
- c) On pose  $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ . Montrer que la suite  $(v_n)$  converge et préciser sa limite.
- d) En admettant le lemme de Cesàro, trouver un équivalent de  $u_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .