Exercice 1 *(Mines-Télécom 25)*
Montrer que la suite définie par $u_n = \dfrac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}$ tend vers 0.

Exercice 2 *(Mines-Télécom 26)* Pour $n\in\mathbf{N}$ on pose : $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \sin(nt)\,\mathrm{d}t$.
1) Établir la convergence de la suite (u_n).
2) Montrer que $u_{n+1}-u_n = \frac{1}{n+1} - u_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbf{N}$.
3) Déterminer le nature de la série de terme général u_n.

Exercice 3 *(Mines-Télécom 26)*
Soit (u_n) définie par $u_0\in]0,1[$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + u_n^2\right)$ pour tout $n\in\mathbf{N}$.
Étudier la suite (u_n) puis déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 4 *(Mines-Télécom 25)*
Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}$.

Exercice 5 *(CCINP 26)*
Déterminer la nature de $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}\displaystyle\int_{n^2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ puis de $\sum (-1)^n \displaystyle\int_0^n \mathrm{e}^{-n^2t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6 *(CCINP 25)*
Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \cos\left(\pi n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.
Indication : Montrer que $u_n = \frac{(-1)^n\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 7 *(CCINP 25)* Étudier la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n \sin(\ln(n))}{n}$.
Indication : étudier $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$.

Exercice 8 *(Mines-Ponts 25)*
Déterminer la nature de la série de terme général $\mathrm{e}^{u_n} - 2$ où $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)}$.

Exercice 9 *(Mines-Ponts 25)*
a) Donner un équivalent de $\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ quand $x\to+\infty$.
b) En déduire un équivalent de la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \int_{u_n}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10 *(Mines-Télécom 23)* Soit $a_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(\sin t)^{2n}\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que la suite (a_n) est bien définie et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.
b) Montrer que : $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $(1+4n^2)a_n = (4n^2-2n)a_{n-1}$.
c) Soit $b_n = a_n\sqrt{n}$. Établir la convergence de la série de terme général $\ln\left(\frac{b_n}{b_{n-1}}\right)$.
d) Déterminer la nature de la série de terme général a_n.

Exercice 11 *(Mines-Télécom 23)* On définit une suite par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.
a) Montrer que la suite (u_n) est correctement définie et convergente.
b) Montrer que la série de terme général u_n^2 converge.
c) On pose $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$. Montrer que la suite (v_n) converge et préciser sa limite.
d) En admettant le lemme de Cesàro, trouver un équivalent de u_n quand $n\to+\infty$.