

- 1) Soit $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
- Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $0 \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
 - En déduire l'existence d'un réel γ tel que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
 - Trouver un équivalent de $H_n - \ln(n) - \gamma$.
- 2) Dans la série harmonique alternée, on prend p termes positifs, puis q négatifs, puis p positifs, et ainsi de suite... On note S_n la n -ième somme partielle de cette série et $T_k = S_{k(p+q)}$. Par exemple, pour $p = 2$ et $q = 3$, $T_2 = S_{10} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}$.
- Trouver une expression de T_k en fonction de H_{2kp} , H_{kp} et H_{kq} .
 - En déduire la convergence de la suite (T_k) , puis celle de la suite (S_n) , vers une limite que l'on exprimera en fonction de p et q .
- 3) Dans la série harmonique alternée, on prend maintenant le premier terme, puis un négatif, puis 2 positifs, puis un négatif, puis 3 positifs, puis un négatif, puis 4 positifs, et ainsi de suite... Par exemple, $S_8 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}$.
- Déterminer $\varphi(n)$ le rang du n -ième terme négatif (par exemple, $\varphi(1) = 2$, $\varphi(2) = 5$).
 - Montrer que $S_{\varphi(n+1)} - S_{\varphi(n)} \geq \frac{n}{2(n+1)(n+2)}$.
 - En déduire que la limite de S_q quand q tend vers l'infini.
- 4) Soit $u_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.
- Montrer que la série de terme général u_n converge.
 - Montrer que $\sum_{k=1}^{2n} u_k = (\ln 2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k}$.
 - Via une comparaison série-intégrale, montrer que $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k} = (\ln 2)(\ln n) + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.
 - Déterminer alors la valeur exacte de $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.
- 5) Soit $V_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.
- Montrer l'existence d'un réel c tel que $V_n = 2\sqrt{n} + c + o(1)$.
 - On considère la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ dans laquelle on réordonne les termes comme dans la deuxième question. Montrer que si $p \neq q$ alors la série obtenue est divergente.