

Exercice 1 (Mines-Télécom 25)

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 2 (Mines-Télécom 25)

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n}$.

Exercice 3 (Mines-Télécom 25)

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi n^3 \left(\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)^2\right)$.

Exercice 4 (Mines-Télécom 25 et CCINP 21) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note (E_n) l'équation $x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) admet une unique solution sur $[0, 1]$, que l'on notera u_n .
- Déterminer la limite de la suite (u_n) puis la nature de la série de terme général u_n .

Exercice 5 (CCINP 25 et 24) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0, \pi[$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

- Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
- Montrer que la série de terme général u_n^3 converge. (on pourra considérer $u_{n+1} - u_n$)
- Montrer que la série de terme général u_n^2 diverge. (on pourra considérer $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$)

Exercice 6 (CCINP 25) Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que la série de terme général a_n est convergente et l'on définit une suite (u_n) par $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}\right)$.

- Montrer que $u_{n+1} - u_n \leq \frac{a_n}{2}$. En déduire que la suite u_n converge.
- Examiner la réciproque, en considérant $u_n = n/(n+1)$.

Exercice 7 (Mines-Ponts 25) Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.

On suppose qu'il existe un réel λ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + w_n$ avec $\sum w_n$ absolument convergente.

- Montrer que la série de terme général $\frac{\lambda}{n} + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge absolument.
- En déduire que la convergence de la suite de terme général $n^\lambda u_n$.
- Montrer ainsi la convergence de la série de terme général $\frac{n^n}{n!e^n}$.

Exercice 8 (Centrale 25)

a) Soit (u_n) une suite de réels convergeant vers 0.

Montrer que la convergence de la suite $(\sum_{k=0}^{2n} u_k)$ entraîne celle de la série de terme général u_n .

b) Soit $h_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sqrt{k}$.

Montrer que $h_{2n} \sim \frac{\sqrt{2n}}{2}$ quand n tend vers l'infini. En déduire un équivalent de h_n .

Exercice 9 (Centrale 25) Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \sin(\pi n!e)$ et $v_n = \sin\left(\frac{\pi n!}{e}\right)$.

- Écrire deux fonctions $U(n)$ et $V(n)$ renvoyant les n premiers termes des suites (u_n) et (v_n) . Tracer les courbes correspondantes. Que peut-on conjecturer concernant la nature des séries associées?
- Soit $S_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $R_n = n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.
 - Que vaut $S_n + R_n$? Montrer que $u_n = (-1)^{n+1} \sin(\pi R_n)$.
 - Étudier la monotonie de (R_n) puis montrer que $R_n \leq \frac{1}{n}$.
 - Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n .
- Soit $T_n = n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$. Montrer que $v_n = (-1)^n \sin(\pi T_n)$.
Trouver un équivalent de T_n puis conclure quant à la nature de la série de terme général v_n .