Exercice 1 *(CCINP 2015)* Soit $f_1,\dots,f_n$ des endomorphismes d'un espace E de dimension finie.
On suppose que : $f_1+f_2+\dots+f_n=Id_E$ et $i\neq j\Longrightarrow f_i\circ f_j=0$.
Montrer que chaque f_i est un projecteur et que $E=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathrm{Im}(f_i)$.

Exercice 2 *(Mines-Télécom 26)*
On se donne $A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et l'on considère $\varphi\colon \mathscr{M}_n(\mathbf{R})\to\mathscr{M}_n(\mathbf{R})\,;\ X\mapsto X+\mathrm{tr}(X)A$.

1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
2) Montrer que si $\mathrm{tr}(A)\neq -1$, alors φ est bijectif.
3) Déterminer le rang et l'image de φ lorsque $\mathrm{tr}(A)=-1$.

Exercice 3 *(CCINP 26)*
Soit p et q deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie, vérifiant :
$p+q=\mathrm{Id}_E$ et $\mathrm{rg}(p)+\mathrm{rg}(q)\leqslant\dim(E)$. Montrer que p et q sont des projecteurs.

Exercice 4 *(CCINP 26)*
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E, vérifiant : $f^3+f=0_{\mathscr{L}(E)}$.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.
2) Montrer que si E est de dimension finie, alors le rang de f est pair.

Exercice 5 *(CCINP 26)* Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbf{R}^3$ vérifiant : $u^3+u=0$.

1) Montrer que $\mathrm{Im}\left(u^2+\mathrm{Id}_E\right)\subset\mathrm{Ker}(u)$.
2) Montrer que $\mathrm{Ker}\left(u^2+\mathrm{Id}_E\right)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont en somme directe.
3) Montrer que ni $\mathrm{Ker}\left(u^2+\mathrm{Id}_E\right)$ ni $\mathrm{Ker}(u)$ ne sont réduits à $\{0_E\}$.
4) En déduire que u peut être représenté dans une base de $\mathbf{R}^3$ par $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

Exercice 6 *(Navale 26)* Soit $n\geqslant 2$.

1) Montrer que si $\mathscr{H}$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ ne contenant pas de matrice inversible, alors $\mathscr{H}$ contient toutes les matrices nilpotentes.
2) En déduire que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ contient une matrice inversible.

Exercice 7 *(CCINP 26)* Soit $a\in\mathbf{R}$ et $\Phi\colon P\in\mathbf{R}[X]\mapsto(X-a)(P'(X)-P'(a))-2(P(X)-P(a))$.

a) Vérifier que Φ est un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$.
b) Trouver le plus grand $k\in\mathbf{N}$ tel que $(X-a)^k$ divise $\Phi(P)$ pour tout $P\in\mathbf{R}[X]$.
c) Déterminer le noyau et l'image de Φ.

Exercice 8 *(Mines-Télécom 26)* Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1) Montrer que deux sous-espaces de E ont même dimension si, et seulement si, ils admettent un supplémentaire commun.
2) Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F_1<\dim(F_2)$.
Montrer qu'il existe deux sous-espaces G_1 et G_2 de E tels que : $F_1\bigoplus G_1=F_2\bigoplus G_2=E$ et $G_2\subset G_1$.

Exercice 9 *(Centrale 25)* Soit $n\in\mathbf{N}^*$ et $a,b\in\mathbf{R}$ tels que $a<b$. On cherche à prouver l'existence et l'unicité de $(\alpha_0,\dots,\alpha_n)\in\mathbf{R}^{n+1}$ tel que : $\forall P\in\mathbf{R}_n[X]$, $\int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k P\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ (1)

1) Montrer que (1) est équivalent à : $\forall Q\in\mathbf{R}_n[X]$, $\int_0^n Q(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k Q(k)$
En déduire que les α_k sont indépendants de (a,b).

2) Pour $i \in [\![0,n]\!]$, soit $B_i = \prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}} (X-k)$. Montrer que $(B_0,\dots,B_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
En déduire l'existence et l'unicité de $(\alpha_0,\dots,\alpha_n)$.

3) Montrer que : $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $\alpha_i = \alpha_{n-i}$.

4) Calculer les α_i pour $n = 1, 2$ et 3.

Exercice 10 *(CCINP 24)*

1) Rappeler la forme d'une matrice de Vandermonde et l'expression de son déterminant.

2) Pour tout k entier naturel compris entre 1 et n, on pose $f_k(x) = \mathrm{e}^{kx}$.
Montrer que la famille $(f_1,\dots,f_n)$ est libre.

3) Montrer, sans les calculer, que le polynôme $P(X) = X^3 + X + 1$ admet trois racines distinctes dans $\mathbf{C}$, que l'on notera α, β, γ.

4) Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 3\\ \alpha x+\beta y+\gamma z &=& 0\\ \alpha^2 x+\beta^2 y+\gamma^2 z &=& -2\end{array}\right.$

Exercice 11 *(CCINP 25)* Étant donné $A = \left(A_{i,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on définit pour tout $x \in \mathbf{R}$ la matrice $M(x)$ par : $[M(x)]_{i,j} = A_{i,j} + x$ pour $1 \leqslant i,j \leqslant n$. On s'intéresse à $D(x) = \det(A(x))$.

a) On donne $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4\\ -3 & 2\end{smallmatrix}\right)$. Calculer $D(x)$.

b) Montrer que $D(x)$ est toujours un polynôme en x, de degré au plus 1.

c) En déduire la valeur de $\det(A)$ lorsque $A_{i,i} = a$, $A_{i,j} = b$ pour $i > j$ et c pour $i < j$.

Exercice 12 *(Mines-Ponts 24)* Soit $x \in \mathbf{R}$ et $P \in \mathbf{R}_{n-2}[X]$.
Montrer que la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ définie par : $A_{i,j} = P(x+i+j-2)$ n'est pas inversible.

Exercice 13 *(Mines-Télécom 25)*

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que $\det\left(\overline{A}\right) = \overline{\det(A)}$.

2) Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2+B^2) \geqslant 0$.

Exercice 14 *(Mines-Télécom 24)* Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit $A_n \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ définie par : $A_{i,i} = 2$ et $A_{i,j} = -1$ pour $|i-j| = 1$, les autres coefficients étant nuls. On note Δ_n le déterminant de A_n.
Montrer que $\Delta_{n+2} = 2\Delta_{n+1} - \Delta_n$. En déduire la valeur de Δ_n.

Exercice 15 *(Mines-Télécom 22)* Soit $A \in GL_n(\mathbf{R})$ et J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont les coefficients sont tous égaux à 1. On pose $b_{i,j} = [A^{-1}]_{i,j}$ et $M = JA^{-1}$.

a) Expliciter les coefficients de M et donner son rang.

b) Montrer que $\det(A-J) = \left(1 - \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{1\leqslant j\leqslant n} b_{i,j}\right)\det(A)$.

Exercice 16 *(Mines-Ponts 2018)*
Calculer la trace et le déterminant de l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ défini par : $u(M) = M^T$.

Exercice 17 *(Mines-Ponts 2017)* Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$. Montrer que :
$\det(A) = \det(B) = \det(A-B) = \det(A+B) = 0 \Longrightarrow \forall (x,y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R},\ \det(xA+yB) = 0$.

Exercice 18 *(Centrale 2012)* Soit $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbf{R}^n$. Calculer le déterminant de $A = \left(|a_i - a_j|\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
Indication : effectuer d'abord le calcul en supposant $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.