

Exercice 1 (CCINP 2015) Soit $f_1, \dots, f_n$ des endomorphismes d'un espace E de dimension finie. On suppose que : $f_1 + f_2 + \dots + f_n = \text{Id}_E$ et $i \neq j \implies f_i \circ f_j = 0$. Montrer que chaque f_i est un projecteur et que $E = \bigoplus_{i=1}^n \text{Im}(f_i)$.

Exercice 2 (Mines-Télécom 26)

On se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et l'on considère $\varphi: \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) ; X \mapsto X + \text{tr}(X)A$.

- 1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
- 2) Montrer que si $\text{tr}(A) \neq -1$, alors φ est bijectif.
- 3) Déterminer le rang et l'image de φ lorsque $\text{tr}(A) = -1$.

Exercice 3 (CCINP 26)

Soit p et q deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie, vérifiant : $p + q = \text{Id}_E$ et $\text{rg}(p) + \text{rg}(q) \leq \dim(E)$. Montrer que p et q sont des projecteurs.

Exercice 4 (CCINP 26)

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E , vérifiant : $f^3 + f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

- 1) Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires.
- 2) Montrer que si E est de dimension finie, alors le rang de f est pair.

Exercice 5 (CCINP 26) Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbf{R}^3$ vérifiant : $u^3 + u = 0$.

- 1) Montrer que $\text{Im}(u^2 + \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(u)$.
- 2) Montrer que $\text{Ker}(u^2 + \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(u)$ sont en somme directe.
- 3) Montrer que ni $\text{Ker}(u^2 + \text{Id}_E)$ ni $\text{Ker}(u)$ ne sont réduits à $\{0_E\}$.
- 4) En déduire que u peut être représenté dans une base de $\mathbf{R}^3$ par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 (Navale 26) Soit $n \geq 2$.

- 1) Montrer que si $\mathcal{H}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ ne contenant pas de matrice inversible, alors $\mathcal{H}$ contient toutes les matrices nilpotentes.
- 2) En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ contient une matrice inversible.

Exercice 7 (CCINP 26) Soit $a \in \mathbf{R}$ et $\Phi: P \in \mathbf{R}[X] \mapsto (X - a)(P'(X) - P'(a)) - 2(P(X) - P(a))$.

- a) Vérifier que Φ est un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$.
- b) Trouver le plus grand $k \in \mathbf{N}$ tel que $(X - a)^k$ divise $\Phi(P)$ pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$.
- c) Déterminer le noyau et l'image de Φ .

Exercice 8 (Mines-Télécom 26) Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

- 1) Montrer que deux sous-espaces de E ont même dimension si, et seulement si, ils admettent un supplémentaire commun.
- 2) Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F_1 < \dim(F_2)$.
Montrer qu'il existe deux sous-espaces G_1 et G_2 de E tels que : $F_1 \oplus G_1 = F_2 \oplus G_2 = E$ et $G_2 \subset G_1$.

Exercice 9 (Centrale 25) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a < b$. On cherche à prouver l'existence et l'unicité de $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que : $\forall P \in \mathbf{R}_n[X], \int_a^b P(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^n \alpha_k P\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$ (1)

- 1) Montrer que (1) est équivalent à : $\forall Q \in \mathbf{R}_n[X], \int_0^n Q(x) dx = \sum_{k=0}^n \alpha_k Q(k)$
En déduire que les α_k sont indépendants de (a, b) .

2) Pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, soit $B_i = \prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq i}} (X - k)$. Montrer que $(B_0, \dots, B_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

En déduire l'existence et l'unicité de $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$.

3) Montrer que : $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \alpha_i = \alpha_{n-i}$.

4) Calculer les α_i pour $n = 1, 2$ et 3 .

Exercice 10 (CCINP 24)

1) Rappeler la forme d'une matrice de Vandermonde et l'expression de son déterminant.

2) Pour tout k entier naturel compris entre 1 et n , on pose $f_k(x) = e^{kx}$.

Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

3) Montrer, sans les calculer, que le polynôme $P(X) = X^3 + X + 1$ admet trois racines distinctes dans $\mathbf{C}$, que l'on notera α, β, γ .

4) Résoudre le système
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z = 0 \end{cases}$$

Exercice 11 (CCINP 25) Étant donné $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on définit pour tout $x \in \mathbf{R}$ la matrice $M(x)$ par : $[M(x)]_{i,j} = A_{i,j} + x$ pour $1 \leq i, j \leq n$. On s'intéresse à $D(x) = \det(A(x))$.

a) On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $D(x)$.

b) Montrer que $D(x)$ est toujours un polynôme en x , de degré au plus 1 .

c) En déduire la valeur de $\det(A)$ lorsque $A_{i,i} = a$, $A_{i,j} = b$ pour $i > j$ et c pour $i < j$.

Exercice 12 (Mines-Ponts 25) Soit $x \in \mathbf{R}$ et $P \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$.

Montrer que la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par : $A_{i,j} = P(x + i + j - 2)$ n'est pas inversible.

Exercice 13 (Mines-Télécom 25)

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

2) Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

Exercice 14 (Mines-Télécom 24) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par : $A_{i,i} = 2$ et $A_{i,j} = -1$ pour $|i - j| = 1$, les autres coefficients étant nuls. On note Δ_n le déterminant de A_n .

Montrer que $\Delta_{n+2} = 2\Delta_{n+1} - \Delta_n$. En déduire la valeur de Δ_n .

Exercice 15 (Mines-Télécom 22) Soit $A \in GL_n(\mathbf{R})$ et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont les coefficients sont tous égaux à 1 . On pose $b_{i,j} = [A^{-1}]_{i,j}$ et $M = JA^{-1}$.

a) Expliciter les coefficients de M et donner son rang.

b) Montrer que $\det(A - J) = (1 - \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} b_{i,j}) \det(A)$.

Exercice 16 (Mines-Ponts 2018)

Calculer la trace et le déterminant de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ défini par : $u(M) = M^T$.

Exercice 17 (Mines-Ponts 2017) Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Montrer que :

$\det(A) = \det(B) = \det(A - B) = \det(A + B) = 0 \implies \forall (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}, \det(xA + yB) = 0$.

Exercice 18 (Centrale 2012) Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$. Calculer le déterminant de $A = (|a_i - a_j|)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Indication : effectuer d'abord le calcul en supposant $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.