

**Exercice 1** (ENSEA 25) On souhaite déterminer les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3c_n \end{cases}$$

- Écrire le système sous forme matricielle :  $X_{n+1} = AX_n$  avec  $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ .
- Calculer  $A^n$  puis donner l'expression des trois suites en fonction de  $n$  et de  $a_0, b_0, c_0$ .

**Exercice 2** (Mines-Ponts 23) Soit  $(P)$  le plan d'équation  $x - 2z - y = 0$  et  $u$  le vecteur  $(1, 2, 1)$ .

- Donner la matrice de la projection vectorielle sur  $(P)$  de direction  $u$ .
- Déterminer l'image par cette projection de la droite  $(D)$  d'équations  $x - y + z = 0$  et  $2x + y - 2z = 0$ .

**Exercice 3** (Navale 23) Dans un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $E$ , on considère un projecteur  $p$  et un endomorphisme  $u$  vérifiant  $u^n = \text{Id}_E$ . On suppose que l'image de  $p$  est stable par  $u$  et l'on pose  $q = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u^k \circ p \circ u^{n-k}$ . Montrer que  $q$  est un projecteur dont le noyau est stable par  $u$ .

**Exercice 4** (Centrale 23)

- Montrer que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  est de rang 1 ssi il existe  $Y$  et  $X$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  non nuls tels que  $A = XY^\top$ .
- Soit  $A$  définie par  $A_{i,j} = \sin(i+j)$ . Déterminer le rang de  $A$  puis montrer qu'il existe  $C_1, C_2, D_1$  et  $D_2$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  telles que  $A = (C_1, C_2)(D_1, D_2)^\top$ .

**Exercice 5** (Centrale 25) Soit  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie, tels que  $f^2 = g^2 = \text{Id}_E$  et  $f \circ g + g \circ f = 0$ . On note  $A_f = \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$  et  $B_f = \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$ .

- Montrer que  $g(A_f) = B_f$  et  $g(B_f) = A_f$ . En déduire que la dimension de  $E$  est paire.
- Montrer que  $f$  et  $g$  peuvent être représentées dans une même base par  $\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & -I_n \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$ .

**Exercice 6** (Centrale 2017) Soit  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  avec  $A \in GL_p(\mathbf{R})$ . Montrer que :  $\text{rg}(M) = p \iff D = CA^{-1}B$ .

**Exercice 7** (CCINP 25) Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$ . On suppose que  $u$  est annulé par un polynôme dont 0 est racine simple.

- Que peut-on dire des coefficients de  $P$ ?
- Montrer que  $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$ .
- Montrer que si  $u$  est nilpotent alors  $u$  est nul.

**Exercice 8** (Centrale 22) On pose  $Q_0 = 1$  et, pour  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $Q_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (X - k)$ . On s'intéresse à l'endomorphisme de  $\mathbf{R}_n[X]$ ,  $\Delta : P \mapsto P(X+1) - P(X)$ .

- Montrer que  $(Q_n)$  est une base de  $\mathbf{R}_n[X]$ .
- Calculer  $\Delta(Q_n)$ .
- Déterminer l'image et noyau de  $\Delta$ .
- Montrer que, pour tout  $P \in \mathbf{R}_n[X] : P = P(0) + \Delta(P)(0)Q_1 + \Delta^2(P)(0)Q_2 + \dots + \Delta^n(P)(0)Q_n$ .

**Exercice 9** (Mines-Ponts 21)

Soit  $\mathcal{H}$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  de trace nulle et  $\mathcal{N}$  l'ensemble des matrices nilpotentes.

- $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{N}$  sont-ils des espaces vectoriels?
- Montrer que l'espace engendré par  $\mathcal{N}$  est inclus dans  $\mathcal{H}$ . Cette inclusion est-elle une égalité?

**Exercice 10** (Centrale 25)

1) Soit  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Déterminer  $\text{Ker}(M)$ ,  $\text{Im}(M)$ ,  $\text{Ker}(M^2)$ ,  $\text{Im}(M^2)$ .

$\text{Ker}(M)$  et  $\text{Im}(M)$  sont-ils supplémentaires?  $\text{Ker}(M^2)$  et  $\text{Im}(M^2)$  sont-ils supplémentaires?

2) Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

On note  $N(u) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{Ker}(u^k)$  et  $C(u) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \text{Im}(u^k)$ .

a) Montrer que  $N(u)$  et  $C(u)$  sont deux sous-espaces supplémentaires stables par  $u$ .

b) Montrer que l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $C(u)$  est un automorphisme.

c) Montrer que l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $N(u)$  est nilpotent.

d) Montrer qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $N(u) = \text{Ker}(u^p)$  et  $C(u) = \text{Im}(u^p)$ .

e) Montrer que si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces de  $E$  vérifiant

i)  $E = F \oplus G$

ii)  $F$  est stable par  $u$  et  $u$  induit sur  $F$  un automorphisme,

iii)  $G$  est stable par  $u$  et  $u$  induit sur  $G$  un endomorphisme nilpotent

alors  $F = C(u)$  et  $G = N(u)$ .

**Exercice 11** (Navale 25)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $D_A$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $M + M^T = \text{tr}(M)A$ .

Montrer que  $D_A$  est un sous-espace de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et préciser sa dimension.

**Exercice 12** (Centrale 25) Soit  $f$  une application linéaire de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  dans  $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  vérifiant  $f(AB) = f(A)f(B)$  pour tout couple  $(A, B)$  de matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Pour  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  on pose  $\Phi(M) = \text{tr}(f(M))$ . Montrer que  $\Phi(AB) = \Phi(BA)$  pour tout couple  $(A, B)$  de matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

En déduire qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $\text{tr}(f(M)) = \alpha \text{tr}(M)$  pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**Exercice 13** (Mines-Ponts 22) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $f_A$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  défini par :  $f_A(M) = AM$ . Déterminer la trace et le rang de  $f_A$ .

**Exercice 14** (Mines-Ponts 21)

Montrer que le déterminant  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & x_2 & 1 & 0 \\ x_1^2 & 2x_1 & x_2^2 & 2x_2 & 2 \\ x_1^3 & 3x_1^2 & x_2^3 & 3x_2^2 & 6x_2 \\ x_1^4 & 4x_1^3 & x_2^4 & 4x_2^3 & 12x_2^2 \end{vmatrix}$  est nul si et seulement si  $x_1 = x_2$ .

**Exercice 15** (Mines-Télécom 21)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^3 - A^2 + A - I_n = 0$ . Montrer que  $\det(A) = 1$ .

**Exercice 16** (Mines-Télécom 24)

Soit  $F$  un sous-espace de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  tel que toute matrice non nulle de  $F$  soit inversible. Soit  $A$  et  $B$  deux matrices non nulles de  $F$ . Montrer que  $x \mapsto \det(xA - B)$  est polynomiale; préciser son degré et son coefficient dominant. En déduire qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $\alpha A - B \notin GL_n(\mathbb{C})$ . Conclusion?

**Exercice 17** (TPE-IVP 19) Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$  tel que  $x^2 = yz$ .

Calculer le déterminant de la matrice  $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  définie par :  $(A_n)_{i,i} = 2x$  pour  $1 \leq i \leq n$ ;  $(A_n)_{i,i-1} = y$  et  $(A_n)_{i-1,i} = z$  pour  $2 \leq i \leq n$ ; les autres coefficients étant nuls.

**Exercice 18** (Mines-Ponts 24)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^3 = A + I_n$ . Montrer que  $\det(A) > 0$ .