

Exercice 1 (CCINP 25) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

En déduire que : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \implies \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$.

Exercice 2 (CCINP 26) Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs normés de E telle que : $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2$.

Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthogonale de E , puis que E est de dimension n .

Exercice 3 (Mines-Télécom 24) Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y + z + t = x - y - z + t = 0\}$.

- 1) Montrer que F est un sous-espace de $\mathbf{R}^4$ et donner une base de F .
- 2) Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$ de la projection orthogonale sur F .
- 3) Soit $u = (1, 1, 1, 1)$. Déterminer $d(u, F)$.

Exercice 4 (Mines-Télécom 26) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de son produit scalaire canonique.

- 1) Déterminer la distance de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ à l'ensemble des matrices symétriques.
- 2) Déterminer la distance de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ à l'ensemble des matrices de trace nulle.

Exercice 5 (Mines-Télécom 25) Pour $P, Q \in \mathbf{R}_2[X]$ on pose $\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + P'(1)Q'(1) + P'(2)Q'(2)$.

- 1) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbf{R}_2[X]$.
- 2) Déterminer une base de $\mathbf{R}_2[X]$ orthonormée pour ce produit scalaire.
- 3) Calculer la distance de $X^2 + X - 2$ à $\mathbf{R}_1[X]$.

Exercice 6 (Mines-Télécom 25)

- 1) Donner la définition du produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
- 2) Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a-c & b \\ c & b+c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \right\}$. Déterminer une base de F ; en déduire la dimension de $F^\perp$.
- 3) Déterminer la distance d'une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ à F .

Exercice 7 (Mines-Télécom 26) Soit n et p deux entiers naturels non nuls avec $n \geq p$.

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ de rang p et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

- 1) Montrer que $\text{Ker}(A^\top A) = \text{Ker}(A)$. En déduire que la matrice carrée $A^\top A$ est inversible.
- 2) On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ du produit scalaire euclidien usuel.
Montrer que $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R})$ minimise $\|AX - B\|$ si et seulement si $A^\top (AX - B) = 0$.
En déduire l'expression du projeté orthogonal de B sur $\text{Im}(A)$.

Exercice 8 (CCINP 24) Pour $(A, B) \in \mathbf{R}[X]$ on pose : $(A|B) = \int_0^{+\infty} A(t)B(t)e^{-t} dt$.

- 1) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire, puis que $(X^k|1) = k!$.
- 2) Soit Q la projection orthogonale de 1 sur $F = \text{Vect}(X, X^2, \dots, X^n)$.
Montrer qu'il existe $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ tel que $Q = \sum_{k=1}^n a_k X^k$.
- 3) Soit $P = 1 - \sum_{k=1}^n a_k \prod_{j=1}^k (X + j)$.
Calculer $(1 - Q|X^i)$. En déduire que $P(i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$, puis l'expression de P .
- 4) Montrer que $\inf \left\{ \int_0^{+\infty} (1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_n t^n)^2 e^{-t} dt, (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{R} \right\} = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 9 (Mines-Ponts 25)

- 1) Montrer que $t \mapsto (\ln t)^2$ est intégrable sur $]0, 1]$.
- 2) Montrer que l'ensemble des fonctions continues de carré intégrable sur $]0, 1]$ est un $\mathbf{R}$ -ev.
- 3) Montrer que l'application $(a, b) \mapsto \int_0^1 (\ln t - at - b)^2 dt$ possède un minimum sur $\mathbf{R}^2$.
- 4) Déterminer la valeur de ce minimum et les points en lesquels il est atteint.