

**Exercice 1** (ENSEA 25)

- a) Montrer que  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$  définit un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ .
- b) Soit  $M = E_{1,2} + E_{2,3}$ . Déterminer, relativement à ce produit scalaire, la projection orthogonale de  $M$  sur le sous-espace vectoriel des matrices symétriques.

**Exercice 2** (Mines-Télécom 25) Soit  $E = \mathbf{R}_3[X]$  et  $U_3 = \{X^3 + aX^2 + bX + c, (a, b, c) \in \mathbf{R}^3\}$ .

- a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur  $E$  en posant :  $\Phi(P, Q) = \int_{-1}^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .
- b) Justifier l'existence et l'unicité de  $A \in U_3$  tel que  $\Phi(A, A) = \min\{\Phi(P, P), P \in U_3\}$ .
- c) Déterminer  $A$  et  $\Phi(A, A)$ .

**Exercice 3** (Mines-Télécom 25) Dans un espace euclidien  $E$  de dimension  $n$ , on considère une famille de vecteurs  $(e_1, \dots, e_n)$  vérifiant :  $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2$ . Montrer qu'une telle famille est génératrice de  $E$ . Est-ce une base orthonormée de  $E$ ?**Exercice 4** (CCINP 22) Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée d'un espace euclidien  $E$  et  $(u_1, \dots, u_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

- a) Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des nombres réels. Montrer que :  $\|\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i\|^2 \leq (\sum_{i=1}^n \lambda_i^2) (\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2)$ .
- b) En déduire que si  $\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 < 1$  alors la famille  $(e_i + u_i)_{i \in [1, n]}$  est une base de  $E$ .

**Exercice 5** (CCINP 25) Soit  $(u_1, \dots, u_{n+1})$  une famille de vecteurs unitaires distincts d'un espace euclidien de dimension  $n$  telle que :  $\exists a \in \mathbf{R}, \forall i \neq j, \langle u_i, u_j \rangle = a$ .

Calculer  $\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i, u_j - u_{n+1} \rangle$  pour  $1 \leq j \leq n$  puis montrer que  $(u_1, \dots, u_n)$  est une base de  $E$ .

**Exercice 6** (CCINP 25) Soit  $E$  l'ensemble des fonctions continues de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbf{R}$ .

Pour  $f$  et  $g$  dans  $E$ , on pose  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ . On considère les sous-espaces de  $E$  :  $F = \{f \in E : \forall x \in [0, 1], f(x) = 0\}$  et  $G = \{g \in E : \forall x \in [-1, 0], g(x) = 0\}$ .

- Vérifier que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit un produit scalaire sur  $E$ .
- Montrer que  $F$  et  $G$  sont en somme directe orthogonale. Sont-ils supplémentaires?
- Justifier l'inclusion  $G \subset F^\perp$ . On veut montrer l'égalité. Pour  $g \in F^\perp$ , soit  $f_n$  nulle sur  $[0, 1]$ , égale à  $g(0)$  sur  $[-1, -\frac{1}{n}]$  et affine sur  $[-\frac{1}{n}, 0]$ . Calculer  $\langle f_n, g \rangle$  pour établir que  $g(0) \int_{-1}^1 g(x) dx = 0$ . Conclure en considérant  $h$  nulle sur  $[0, 1]$  telle que  $h(x) = g(0) - g(x)$  pour  $x \in [-1, 0]$ .

**Exercice 7** (Mines-Ponts 25) Soit  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , des réels deux à deux distincts.

- a) Montrer que  $(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$  définit un produit scalaire sur  $E$ .
- b) Soit  $H = \{P \in \mathbf{R}_n[X] \text{ tq } \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0\}$ . Quelle est la dimension de  $H$ ? Que vaut  $d(Q, H)$ ?

**Exercice 8** (Mines-Ponts 25) Soit  $\varphi : x \mapsto e^{-x^2}$ .

On admet que  $\varphi$  est intégrable sur  $\mathbf{R}$  et que son intégrale vaut  $\sqrt{\pi}$ .

- a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , il existe un unique polynôme  $H_n$  tel que :  $\forall x \in \mathbf{R}, \varphi^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) \varphi(x)$ . Préciser le degré et le coefficient dominant de  $H_n$ .
- b) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur  $\mathbf{R}[X]$  en posant :  $\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t) \varphi(t) dt$ .
- c) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  et tout  $P \in \mathbf{R}[X]$ ,  $\langle P, H_n \rangle = \langle P', H_{n-1} \rangle$ .  
En déduire que la famille  $(H_n)$  est orthogonale. Calculer  $\|H_n\|^2$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .
- d) Pour  $(x, t) \in \mathbf{R}^2$ , étudier la convergence de la série de terme général  $\frac{t^n H_n(x)}{n!}$ .