Normes sur un espace vectoriel

Définition 1 Une *norme* sur un espace vectoriel E est une application $N : E \to \mathbf{R}_+$ vérifiant :

i) $N(x) = 0 \iff x = 0_E$ *(séparation)*

ii) $\forall\, x \in E,\ \forall\, \lambda \in \mathbf{K},\ N(\lambda \cdot x) = |\lambda| N(x)$ *(homogénéité)*

iii) $\forall\, (x, y) \in E \times E,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ *(inégalité triangulaire)*

On dit alors que (E, N) est un espace normé et l'on définit la distance entre deux éléments de E par : $d(x, y) = N(x - y)$.

Exemple 1 Norme associée à un produit scalaire dans un espace préhilbertien réel

Exemple 2 Normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbf{K}^n$ pour $n \in \mathbf{N}^*$

Exemple 3 Norme $\|\cdot\|_\infty$ sur un espace de fonctions bornées à valeurs dans $\mathbf{K}$

Définition 2 Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

1) La *boule ouverte* de centre a et de rayon R est : $B(a, R) = \{x \in E,\ N(x - a) < R\}$
2) La *boule fermée* de centre a et de rayon R est : $B_f(a, R) = \{x \in E,\ N(x - a) \leqslant R\}$
3) La *sphère* de centre a et de rayon R est : $S(a, R) = \{x \in E,\ N(x - a) = R\}$
4) Une partie A de E est dite *bornée* s'il existe $R > 0$ tel que : $\forall\, x \in A,\ N(x) \leqslant R$
5) Une partie A de E est dite *convexe* lorsque : $\forall (x, y) \in A \times A,\ \forall\, t \in [0, 1],\ (1 - t)x + ty \in A$

Remarque Une boule est toujours convexe (et symétrique par rapport à son centre).

Définition 3 On dit qu'une suite (x_n) d'éléments d'un espace normé (E, N) converge vers $\ell \in E$ lorsque $N(x_n - \ell)$ tend vers 0.

Proposition 1 Unicité de la limite

Proposition 2 Toute suite convergente est bornée.

Proposition 3 Limite d'une combinaison linéaire de suites convergentes

Proposition 4 Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Définition 4 Deux normes N_1 et N_2 sont dites équivalentes lorsqu'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que : $\forall\, x \in E,\ N_1(x) \leqslant \alpha N_2(x)$ et $N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$.

Proposition 5 Si deux normes sont équivalentes, toute suite bornée pour l'une l'est aussi pour l'autre ; et toute suite convergente pour l'une converge pour l'autre *vers la même limite*.

Théorème Sur un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Corollaire Dans un espace de dimension finie, la convergence d'une suite équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.