Exercice 1 *(Polytechnique 26)* Montrer que deux normes sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel sont égales si et seulement si elles ont la même boule unité ouverte.

Exercice 2 *(Mines-Ponts 26)* Pour $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ on pose : $N(x,y)=\max\big(|x|,|y|,|x-y|\big)$.
Vérifier que l'on définit ainsi une norme sur $\mathbf{R}^2$ et représenter sa boule unité.

Exercice 3 *(Mines-Télécom 23)*
Soit $\big(\varphi_1,\dots,\varphi_p\big)$ une famille de formes linéaires sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E de dimension n.
À quelle condition $N\colon x\mapsto\max\big\{\big|\varphi_i(x)\big|\ ;\ 1\leqslant i\leqslant p\big\}$ est-elle une norme sur E ?

Exercice 4 *(Mines-Ponts 26)* Soit $F=\mathbf{R}[X]$ et δ l'opérateur de dérivation : $P\mapsto P'$.

1) Montrer que l'on définit une norme sur F en posant $\|P\|_\infty=\sup_{k\in\mathbf{N}}|a_k|$ pour $P=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_kX^k$.
   L'application δ est-elle lipschitzienne lorsque F est ainsi normé ?
2) Soit $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\big(\mathbf{R}_+^*\big)^{\mathbf{N}}$.
   a) Montrer que l'on définit une norme sur F en posant $N(P)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}c_k|a_k|$ pour $P=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_kX^k$.
   b) Trouver $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\big(\mathbf{R}_+^*\big)^{\mathbf{N}}$ telle que la dérivation soit lipschitzienne pour F ainsi normé.
3) Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$ telle que la dérivation soit lipschitzienne.

Exercice 5 *(Mines-Ponts 26)* On munit $\mathbf{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
Soit N une norme quelconque N sur $\mathbf{R}^n$. Pour $x\in\mathbf{R}^n$ on pose : $N^*(x)=\sup\left\{\frac{\langle x,y\rangle}{N(y)}\,;\ y\in\mathbf{R}^n,\ y\neq0\right\}$.

a) Montrer que $N^*=\sup\left\{\frac{\langle x,y\rangle}{N(y)}\,;\ N_2(y)=1\right\}$, $N_2(y)$ désignant la norme euclidienne de y.
b) Montrer que N^* définit une norme sur $\mathbf{R}^n$.
c) Montrer que : $\forall(x,y)\in\mathbf{R}^n$, $\langle x,y\rangle\leqslant N(x)N^*(y)$.
d) *(Polytechnique 2016)* Déterminer N^* lorsque $N=N_2$, puis lorsque $N=N_1$.

Exercice 6 *(Mines-Ponts 26)* $E=\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est muni de structure euclidienne canonique.
Pour $a\in E$ et $p\in\mathbf{N}^*$ on pose : $L_p(A)=\sum_{k=1}^{p}\frac{A^k}{k}$.

1) Montrer que $\|AB\|\leqslant\|A\|\|B\|$ pour tout couple $(A,B)\in E^2$.
2) En déduire que si $\|A\|<1$, la suite $\big(L_p(A)\big)$ converge.

Exercice 7 *(Centrale 22)* Soit E l'ensemble des fonctions f de classe C^2 de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ telles que $f(0)=f'(0)=0$. Pour pour $f\in E$ on pose $N(f)=\|f+2f'+f''\|_\infty$.

a) Pour $f\in E$ soit $h(t)=f(t)\,\mathrm{e}^t$. Montrer que : $\forall\,t\in[0,1]$, $h(t)=\int_0^t(t-u)h''(u)\,\mathrm{d}u$.
b) Montrer que N est une norme sur E.
c) Montrer qu'il existe $a\in\mathbf{R}$ tel que : $\forall f\in E$, $\|f\|_\infty\leqslant aN(f)$.
   Déterminer le plus petit a satisfaisant cette condition.
d) Ces deux normes sont-elles équivalentes ?

Exercice 8 *(Mines-Télécom 26)*
Soit $n\in\mathbf{N}^*$ et F_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n.
Montrer que $\inf\left\{\int_0^1|P(t)|\,\mathrm{d}t\,,\ P\in F_n\right\}>0$.