Définition 1 Soit I un intervalle et (f_n) une suite de fonctions de I dans **R** ou **C**.
On dit que (f_n) *converge simplement* sur I lorsque, pour tout x de I, la suite $(f_n(x))$ converge.
Soit alors $f(x)$ la limite "simple" de $f_n(x)$. On dit que (f_n) *converge uniformément* vers f sur I lorsque $\|f_n - f\|_\infty^I = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Remarque 1 Cela revient à : $\forall\, \varepsilon > 0\,,\quad \exists\, N \in \mathbf{N}\,,\quad \forall\, n \geqslant N\,,\quad \forall\, x \in I\,,\quad |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon\,.$

Remarque 2 La convergence uniforme passe aux combinaisons linéaires,
mais ni aux produits ni aux composées, comme le montre la suite $f_n(x) = (x + 1/n)^2$.

Définition 2 On dit qu'une série de fonctions converge simplement (resp. uniformément) lorsque la suite des sommes partielles converge simplement (resp. uniformément). Si la convergence simple est établie, il reste alors à étudier la convergence uniforme de la suite des restes vers 0.

Définition 3 Une série de fonctions $\sum f_n$ est dite *normalement convergente* sur I lorsque la série de terme général $\|f_n\|_\infty^I$ est convergente.

Proposition 1 La convergence normale implique la convergence uniforme (et absolue).

Proposition 2 Si une suite (f_n) de fonctions continues sur I converge uniformément sur I vers f, alors f est continue sur I.

Remarque 3 Application à la continuité de la somme d'une série de fonctions.

Proposition 3 Si une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément sur $[a,b]$ vers g, alors $\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ quand n tend vers l'infini.

Remarque 4 Application à l'intégration terme à terme d'une série de fonctions.

Proposition 4 Soit (f_n) une suite d'applications de classe C^1 sur un intervalle I.
Si (f_n) converge simplement sur I vers une application f et si (f_n') converge uniformément sur tout segment de I vers une application h, alors f est de classe C^1 sur I et $f' = h$.
En outre, la convergence de (f_n) est alors uniforme sur tout segment de I, ce qui permet d'étendre le théorème aux applications de classe C^k sous l'hypothèse de convergence simple des $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ sur tout segment de I.

Remarque 5 Application à la dérivation terme à terme d'une série de fonctions.

Remarque 6 Soit (f_n) une suite de fonctions convergeant uniformément vers f sur un intervalle I. Si chacune des fonctions f_n admet une limite b_n (réelle ou complexe) en a, extrémité finie ou infinie de I, alors la suite (b_n) est convergente et $f(x)$ tend vers la limite des b_n quand x tend vers a.
C'est le *théorème de la double limite* : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)$.
Désormais, le programme officiel ne mentionne plus que l'application aux séries de fonctions :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$