Exercice 1 *(CCINP 24)* Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit $f_n : x \mapsto \sin\left(nx\,\mathrm{e}^{-nx^2}\right)$.

1) Montrer que cette suite de fonctions converge simplement sur $[-1,1]$.
2) Montrer que, pour tout $a \in]0,1[$, la convergence est uniforme sur $[a,1]$.
3) La convergence est-elle uniforme sur $[0,1]$?

Exercice 2 *(CCINP 26)* Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$ on pose $f_n(x) = \frac{x^2}{x^2+n^2} + \sin(x)$.

1) Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbf{R}$ vers une fonction f que l'on exprimera.
2) Soit $a > 0$. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément vers f sur $[-a,a]$?
3) La suite (f_n) converge-t-elle uniformément vers f sur $\mathbf{R}$?

Exercice 3 *(Centrale 26)* Pour $x \in \mathbf{R}_+^*$ on pose $u_0(x) = x$ puis, pour $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1}(x) = \frac{2\sqrt{u_n(x)}}{1+u_n(x)}$.

1) Montrer que la suite de fonctions (u_n) converge simplement sur $\mathbf{R}_+^*$.
2) Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}_+^*$ on pose $U_n(x) = \frac{1+u_n(x)}{2\sqrt{u_n(x)}}$. Montrer que $|U_{n+1}(x)-1| \leqslant \frac{1}{2}|U_n(x)-1|$.
3) Montrer la suite de fonctions (u_n) converge uniformément sur tout segment de $\mathbf{R}_+^*$.
4) La convergence est-elle uniforme sur $\mathbf{R}_+^*$?

Exercice 4 *(Mines-Télécom 26)*

Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on définit la fonction f_n de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$ par : $f_n(x) = n\,x^2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{n}\,x}$.
Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers une fonction que l'on précisera.
La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbf{R}^+$?

Exercice 5 *(Polytechnique 26)*
Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ et $\beta > 0$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $u_n(x) = n^\alpha x^\beta \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
Étudier en fonction de α et β la convergence sur $\mathbf{R}_+^*$ de la série de fonctions de terme général $u_n(x)$.

Exercice 6 *(CCINP 26)* Soit $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{1+t^n}$.

1) Déterminer le domaine de définition de f puis étudier la continuité de f sur ce domaine.
2) Déterminer un équivalent de $f(t)$ lorsque t tend vers 1^-.

Exercice 7 *(CCINP 26)* Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$.

1) Montrer que f est définie sur $\mathbf{R}$.
2) Déterminer la limite de f en $+\infty$. (On donnait la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^2$)
3) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^*$ puis déterminer la limite de $f'(x)$ quand x tend vers 0.
4) Donner l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 8 *(Centrale 26)* Soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+x)}$.

1) Montrer que f est définie, continue et décroissante sur $[0,+\infty[$.
2) Déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$ puis montrer que $f(x) = O\left(1/\sqrt{x}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.
3) Exprimer $f(n)$ en fonction de H_n. En déduire un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

Exercice 9 *(Mines-Ponts 26)* Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1+x}{n+x}\right)$.

1) Montrer que f définit une application continue sur $\mathbf{R}_+^*$.
2) Déterminer la limite, puis trouver un équivalent, de $f(x)$ en $+\infty$.

Exercice 10 *(Mines-Ponts 26)* Soit $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n)\,n^x}$.

1) Déterminer le domaine de définition de f puis montrer que f est de classe C^∞ sur ce domaine.
2) Étudier le comportement de f aux bords de son domaine de définition.